学術刊行物　ISSN 0919-9985

日本航海学会誌
NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
― その３：半没円柱に対する証明 ―

堀　　勉

A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
― Part 3 : The Proof for Semi-submerged Circular Cylinder ―

Tsutomu HORI

平成31年
4 月
第208号

研究・調査

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
― その３：半没円柱に対する証明 ―

堀 勉

A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
― Part 3 : The Proof for Semi-submerged Circular Cylinder ―

Tsutomu HORI

キーワード： *浮心，圧力中心，静水圧，半没円柱，矩形断面*

1．はじめに

船に作用する浮力の中心「浮心」は，水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち，水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは，造船学上，否，物理学上の周知の事実である．

Archimedes の原理[1]が教える浮力は，静水圧の圧力積分によって明快に求められるが，浮心位置については，物理学や水理学，造船学や航海力学など，どの教科書（例えば，第 1 報[2]の参考文献(2)～(16)）にも，水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると記述されていて，静水圧による圧力中心としての説明は見当たらない．

そんな状況の中, 10 年ほど前, 小松[3]によって,「浮心≠圧力中心？」の問題提起が成され，日本船舶海洋工学会の推進性能･運動性能合同研究会等でも，瀬戸[4],[5]，鈴木(勝)[6]，小松[7]，薮下[8]，慎[9]らによって，活発に議論が成された．

この問題に対して，著者は，この航海学会誌上で，第 1 報[2]と第 2 報[10]において，船をθだけ横傾斜させた状態で，静水圧を圧力積分して，作用する力とモーメントを計算することにより，傾斜時の圧力中心を決定した．その結果を，$\theta \to 0$とすることで，圧力中心が，水面下の図心，即ち，周知の浮心に位置することを，矩形断面[2]に続いて，任意の横断面形状[10]について証明した．

この問題については，一色[11]や薮下[12]は，重力の作用方向を，鉛直方向から傾斜させることにより，「浮心＝圧力中心」であることを示した． その後，薮下ら[13]は，浮体や重力の作用方向を傾斜させるのではなく，座標系を回転させることで，同様の結論が得られることを示した． 一方，鈴木(勝)[14]や小松[15]が，種々のアプローチで，この問題に対して検討を加える中，著者の証明[16]に対しても，半没円柱の場合でも，同様の結論でしょうか？とのご意見が，何人かの先生方から寄せられた．

半没円柱の場合も，第 2 報[10]の任意形状の証明に含まれるものであるが，矩形と共に典型的な断面形状であるので，ここに改めて第 3 報として，ご報告させて頂く次第である．

2．半没円柱の圧力中心C_Pの位置決め

図 1 は，半径Rの半没円柱（幅$2R$，吃水R）の横断面が，右舷側にθだけ横傾斜した場合を示す．静水面中央に原点oを置き，z軸を鉛直下向きに取った空間固定座標系を$o-yz$，円柱に固定した座標系を$o-\eta\zeta$とする．

ζ軸から反時計方向に測った偏角をϕとするとき，図中に示すように，左舷側の水面位置の偏角ϕ_Lと，右舷側の水面の偏角ϕ_Rは，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}\phi_L &= -\frac{\pi}{2}+\theta \\ \phi_R &= \frac{\pi}{2}+\theta\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となる．このとき，空中部 C_{air} と没水部 C_{water} は，偏角 ϕ で記述すると，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}C_{air} &: \frac{\pi}{2}+\theta \le \phi \le \frac{3\pi}{2}+\theta \\ C_{water} &: -\frac{\pi}{2}+\theta \le \phi \le \frac{\pi}{2}+\theta\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

である．円柱表面 $(\eta, \zeta) = (R\sin\phi, R\cos\phi)$ での水深 $z(\phi)$ は，

$$\begin{aligned} z(\phi) &= (\zeta + \eta\tan\theta)\cos\theta \\ &= (R\cos\phi + R\sin\phi\cdot\tan\theta)\cos\theta \\ &= R(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \quad \cdots\cdots (3)\end{aligned}$$

である．このとき，円柱表面に立てた，外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，偏角 ϕ を使って，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= n_\eta \boldsymbol{j} + n_\zeta \boldsymbol{k} \\ &= \sin\phi\, \boldsymbol{j} + \cos\phi\, \boldsymbol{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)\end{aligned}$$

のように書ける． ここに， n_η, n_ζ は，それぞれ，円柱固定座標 η, ζ に対する方向余弦を意味する．

大気圧を p_0，水の比重量を γ とし，図1で，大気圧を破線，静水圧 γz を実線のベクトルで示していて，全て，円柱表面に対して垂直な $-\boldsymbol{n}$ 方向に作用する．

2.1　円柱表面に働く圧力による力

円柱表面に働く，圧力による $-\eta$ 方向の力 $F_{-\eta}$ と $-\zeta$ 方向の力 $F_{-\zeta}$ は，空中部 C_{air} に働く大気圧 p_0 による力と，没水部 C_{water} に働く静水圧 $p_0+\gamma z$ による力の和で，それぞれ，

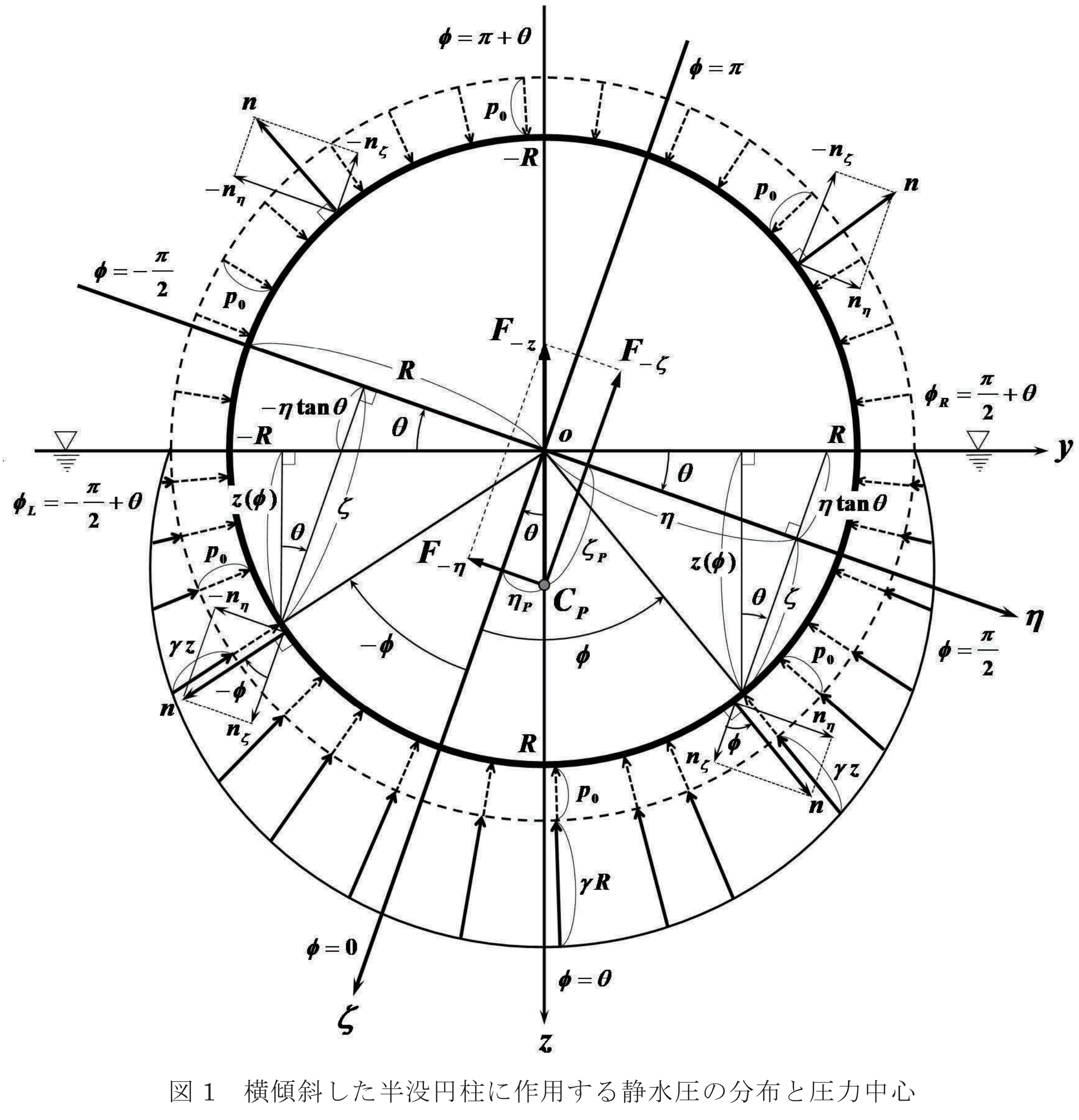

図1　横傾斜した半没円柱に作用する静水圧の分布と圧力中心

$$\left.\begin{aligned} F_{-\eta} &= \int_{C_{air}} p_0 n_\eta \, d\ell + \int_{C_{water}} (p_0 + \gamma z)\, n_\eta \, d\ell \\ F_{-\zeta} &= \int_{C_{air}} p_0 n_\zeta \, d\ell + \int_{C_{water}} (p_0 + \gamma z)\, n_\zeta \, d\ell \end{aligned}\right\} \quad \cdots(5)$$

によって求まる． ここに，円柱表面では，線素は $d\ell = R\,d\phi$，η 方向と ζ 方向の方向余弦は，(4)式により $n_\eta = \sin\phi, n_\zeta = \cos\phi$ と書けるから，C_{air}，C_{water} それぞれに対し，(2)式の区間で，偏角 ϕ に関する積分で表記できる．

実際，$-\eta$ 方向に働く $F_{-\eta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\eta} &= \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} p_0 \sin\phi \cdot R d\phi + \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (p_0 + \gamma z) \sin\phi \cdot R d\phi \\ &= p_0 R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} \sin\phi \, d\phi + \gamma R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z \sin\phi \, d\phi \\ &= \gamma R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z(\phi) \sin\phi \, d\phi \quad \cdots\cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

のように，$-\zeta$ 方向に働く $F_{-\zeta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\zeta} &= \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} p_0 \cos\phi \cdot R d\phi + \int_{-\frac{\pi}{2}+\phi}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (p_0 + \gamma z) \cos\phi \cdot R d\phi \\ &= p_0 R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} \cos\phi \, d\phi + \gamma R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z \cos\phi \, d\phi \\ &= \gamma R \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z(\phi) \cos\phi \, d\phi \quad \cdots\cdots\cdots(7) \end{aligned}$$

となり，$F_{-\eta}, F_{-\zeta}$ ともに，第 1 項の大気圧 p_0 に関する円柱表面の全周に亙る積分はゼロとなり，力に寄与しないことが分かる． よって，第 2 項の水深 $z(\phi)$ に，(3)式を用いて計算すればよいことになり，$F_{-\eta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\eta} &= \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \sin\phi \, d\phi \\ &= \gamma R^2 \left\{ \cos\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin\phi\cos\phi \, d\phi \right. \\ &\qquad \left. + \sin\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin^2\phi \, d\phi \right\} \\ &= \frac{1}{2}\gamma R^2 \left\{ \cos\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin 2\phi \, d\phi \right. \\ &\qquad \left. + \sin\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (1 - \cos 2\phi) \, d\phi \right\} \\ &= \gamma \frac{\pi R^2}{2} \sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots(8) \end{aligned}$$

となり，$F_{-\zeta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\zeta} &= \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \cos\phi \, d\phi \\ &= \gamma R^2 \left\{ \cos\phi \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \cos^2\phi \, d\phi \right. \\ &\qquad \left. + \sin\phi \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin\phi\cos\phi \, d\phi \right\} \\ &= \frac{1}{2}\gamma R^2 \left\{ \cos\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (1 + \cos 2\phi) \, d\phi \right. \\ &\qquad \left. + \sin\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin 2\phi \, d\phi \right\} \\ &= \gamma \frac{\pi R^2}{2} \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots(9) \end{aligned}$$

のように，求まる． 両式中で，$\sin 2\phi$ の積分値はゼロ，$(1 \mp \cos 2\phi)$ の積分値は π となるからである．

2. 2 円柱表面に働く圧力によるモーメント

円柱表面に働く $-\eta$ 方向の圧力による，原点 o に関する時計回りのモーメント M_η と，$-\zeta$ 方向の圧力による，反時計回りのモーメント M_ζ は，それぞれ，(5)式にモーメントのレバーとして，ζ 或いは η を乗じて積分することにより，

$$\left.\begin{aligned} M_\eta &= \int_{C_{air}} p_0 \zeta n_\eta \, d\ell + \int_{C_{water}} (p_0 + \gamma z)\, \zeta n_\eta \, d\ell \\ M_\zeta &= \int_{C_{air}} p_0 \eta n_\zeta \, d\ell + \int_{C_{water}} (p_0 + \gamma z)\, \eta n_\zeta \, d\ell \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

によって求め得る．ここに， 前節の $F_{-\eta}, F_{-\zeta}$ に対する(6),(7)両式と同様に，偏角 ϕ に関する積分で表記すれば，M_η は，

$$\begin{aligned} M_\eta &= \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} p_0 \sin\phi \cdot R\cos\phi \cdot R d\phi \\ &\qquad + \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (p_0 + \gamma z) \sin\phi \cdot R\cos\phi \cdot R d\phi \\ &= \frac{1}{2} p_0 R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} \sin 2\phi \, d\phi \\ &\qquad + \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z \sin\phi\cos\phi \, d\phi \\ &= \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z(\phi) \sin\phi\cos\phi \, d\phi \quad \cdots\cdots(11) \end{aligned}$$

となり，M_ζ は，

$$M_\zeta = \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} p_0 \cos\phi \cdot R\sin\phi \cdot R d\phi + \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (p_0 + \gamma z)\cos\phi \cdot R\sin\phi \cdot R d\phi$$
$$= \frac{1}{2} p_0 R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}+\theta} \sin 2\phi d\phi + \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z\sin\phi\cos\phi d\phi$$
$$= \gamma R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} z(\phi)\sin\phi\cos\phi d\phi \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

となることから，M_η, M_ζ に関する両式は，同値となることが分かった.

(11),(12)式ともに，第1項の大気圧 p_0 に関する $\sin 2\phi$ の積分はゼロとなり，第2項の水深 $z(\phi)$ に，(3)式を用いることにより，

$$M_\eta = M_\zeta = \gamma R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \times \sin\phi\cos\phi d\phi$$
$$= \gamma R^3 \left\{ \cos\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin\phi\cos^2\phi d\phi + \sin\theta \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin^2\phi\cos\phi d\phi \right\} \cdot\cdot(13)$$

を計算すればよいことになる．実際，第1項は $p = \cos\phi$，第2項は $q = \sin\phi$ と置いて，それぞれ置換積分すれば,

$$M_\eta = M_\zeta = 2\gamma R^3 \left(\cos\theta \int_0^{\sin\theta} p^2 dp + \sin\theta \int_0^{\cos\theta} q^2 dq \right)$$
$$= 2\gamma R^3 \left(\cos\theta \cdot \frac{1}{3}\sin^3\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{3}\cos^3\theta \right)$$
$$= \frac{2}{3}\gamma R^3 \sin\theta\cos\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= \frac{2}{3}\gamma R^3 \sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

のように，求まる.

2. 3　$-y$ 方向と $-z$ 方向の合力 F_{-y}，F_{-z}

2.1 節(8),(9)式で求めた $F_{-\eta}$，$F_{-\zeta}$ を用いて，水平成分の F_{-y} と，鉛直成分の F_{-z} を求めると,

$$\left.\begin{aligned} F_{-y} &= F_{-\eta}\cos\theta - F_{-\zeta}\sin\theta \\ &= \gamma\frac{\pi R^2}{2}(\sin\theta\cdot\cos\theta - \cos\theta\cdot\sin\theta) = 0 \\ F_{-z} &= F_{-\zeta}\cos\theta + F_{-\eta}\sin\theta \\ &= \gamma\frac{\pi R^2}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \gamma\frac{\pi R^2}{2} \end{aligned}\right\} (15)$$

のように，圧力積分による合力として，水平成分 F_{-y} は生じないことが分かる.

鉛直成分 F_{-z} は，水の比重量 γ と水面下の半円の面積 $\frac{\pi R^2}{2}$ の積となっていて，Archimedes の原理[1]が教える通り，鉛直上向きに生じる浮力そのものである.

2. 4　半没水円柱の圧力中心 C_P の位置決め

圧力中心 C_P を円柱固定の $o-\eta\zeta$ 座標系で，位置決めするには，第1報[1]，第2報[10]と同様に，大串[17]が用いた水理学の手法に基づいて，η 座標 η_P は，$-\zeta$ 方向の圧力による合力 $F_{-\zeta}$ とモーメント M_ζ により，(9),(14)式を用いて,

$$\eta_P = \frac{M_\zeta}{F_{-\zeta}} = \frac{\frac{2}{3}\gamma R^3 \sin\theta\cos\theta}{\gamma\frac{\pi R^2}{2}\cos\theta} = \frac{4}{3\pi}R\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

のように，ζ 座標 ζ_P は，$-\eta$ 方向の圧力による $F_{-\eta}$ と M_η により，(8),(14)式を用いて,

$$\zeta_P = \frac{M_\eta}{F_{-\eta}} = \frac{\frac{2}{3}\gamma R^3 \sin\theta\cos\theta}{\gamma\frac{\pi R^2}{2}\sin\theta} = \frac{4}{3\pi}R\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

のように計算することができ,

$$(\eta_P, \zeta_P) = \left(\frac{4}{3\pi}R\sin\theta, \frac{4}{3\pi}R\cos\theta \right) \quad \cdots\cdot(18)$$

のように決定される．この円柱固定座標での (η_P, ζ_P) を，空間固定座標の (y_P, z_P) に変換すると,

$$\left.\begin{aligned} y_P &= \eta_P\cos\theta - \zeta_P\sin\theta \\ &= \frac{4}{3\pi}R\,(\sin\theta\cdot\cos\theta - \cos\theta\cdot\sin\theta) = 0 \\ z_P &= \zeta_P\cos\theta + \eta_P\sin\theta \\ &= \frac{4}{3\pi}R\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{4}{3\pi}R \end{aligned}\right\} \cdots(19)$$

のように計算され，

$$(y_P, z_P) = \left(0, \frac{4}{3\pi}R\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

となる．これは，正しく水面下の半円のセンターライン（z 軸）の図心位置を示しており，第 2 報の任意の断面形状に対して得られた結論[10]と一致する．これによって，半没円柱についても，圧力中心が，周知の浮心位置であることを，証明できた．

2. 5　考 察

本章の半没円柱の場合は，矩形（第 1 報[2]）や任意の断面形状（第 2 報[10]）の場合と状況が異なり，横傾斜させても，水面下の幾何学的形状が，変化しないことである．結果，横傾斜角 $\theta \to 0$ として，直立時の圧力中心を求める必要がなく，前節(20)式のように，圧力中心の位置を定め得た．

このことは，藪下ら[13]が主唱するように，浮体を横傾斜させることなく，座標系を回転させて，鉛直方向からズラすことにより，鉛直方向の浮心位置を決め得ることを，例証している．

3．矩形断面に対する別証明

2.5 節の考察を踏まえて，第 1 報[2]の矩形断面の場合に対して，浮体を傾斜させることなく，座標系を回転させる手法で，圧力中心の位置決めをしてみる．

図 2 は，幅 $2b$，深さ $f+h$（吃水 f，乾舷 h）の 2 次元 矩形断面が，直立状態で浮いている場合を示す．底面中央に原点 o を置き，水平方向と鉛直上向きに取った座標系を $o-yz$，原点 o を中心に，時計回りに θ だけ回転させた座標系を $o-\eta\zeta$ とする．

図 1 と同様，大気圧を破線，静水圧を実線，それぞれの圧力を細線，力を太線のベクトルで示していて，全て，浮体表面に対して垂直方向に作用する．

3. 1　浮体表面に働く圧力による力

左舷（*Left*），右舷（*Right*）に働く力 P_{Left}，P_{Right} は，それぞれ舷側全体に働く一様分布の大気圧による $P_{Left}^{(0)}$，$P_{Right}^{(0)}$ と，没水部に働く三角形分布の静水圧による $P_{Left}^{(\gamma)}$，$P_{Right}^{(\gamma)}$ の和で求まる．ここに，2 章と同じく，大気圧を p_0，水の比重量を γ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} P_{Left} &= P_{Left}^{(0)} + P_{Left}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma f^2 \\ P_{Right} &= P_{Right}^{(0)} + P_{Right}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma f^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(21)$$

となって，左右両舷に働く力は等しいことから，

$$\left.\begin{aligned} P_{Left} &= P_{Right}\left(\equiv P_{Side}\right) \\ P_{Left}^{(0)} &= P_{Right}^{(0)}\left(\equiv P_{Side}^{(0)}\right) \\ P_{Left}^{(\gamma)} &= P_{Right}^{(\gamma)}\left(\equiv P_{Side}^{(\gamma)}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

のように，それぞれ下添字 *Side* で共通表記したものである．

一方，甲板（*Upper*）に働く力 P_{Upper} は，大気圧による $P_{Upper}^{(0)}$ のみで，底面（*Lower*）に働く力 P_{Lower} は，大気圧による $P_{Lower}^{(0)}$ と，静水圧による $P_{Lower}^{(\gamma)}$ の和で求まるから，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} P_{Upper} &= P_{Upper}^{(0)} \\ &= p_0\cdot 2b \\ P_{Lower} &= P_{Lower}^{(0)} + P_{Lower}^{(\gamma)} \\ &= p_0\cdot 2b + \gamma f\cdot 2b \\ &= P_{Upper}^{(0)} + 2\gamma f b \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となる．

3. 2　y 方向と z 方向の合力 F_y，F_z

前節の(21),(23)式から，水平成分の F_y と，鉛直成分の F_z を求めてみると，

$$\left.\begin{aligned} F_y &= P_{Left} - P_{Right} \\ &= 0 \\ F_z &= P_{Lower} - P_{Upper} \\ &= P_{Lower}^{(\gamma)} = 2\gamma f b \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

のように，圧力積分による合力として，水平成分 F_y は生じないことが分かる．鉛直成分 F_z については，

$$\begin{aligned} F_z &= \gamma\cdot(2b\cdot f) \\ &= \gamma\cdot(\text{水面下の矩形の面積}) = \text{浮力} \quad \cdots(25) \end{aligned}$$

のように書けて，Archimedes の原理[1]が教える通りの浮力である．

3. 3　$-\eta$ 方向と ζ 方向の合力 $F_{-\eta}$，F_ζ

θ だけ回転した座標系の $-\eta$ 及び ζ 方向に働く合力 $F_{-\eta}$，F_ζ は，(21),(23)式を用いて，

$$\left.\begin{aligned} F_{-\eta} &= -P_{Left}\cos\theta + P_{Right}\cos\theta \\ &\quad - P_{Upper}\sin\theta + P_{Lower}\sin\theta \\ &= 2\gamma f b\sin\theta = F_z\sin\theta \\ F_\zeta &= P_{Left}\sin\theta - P_{Right}\sin\theta \\ &\quad - P_{Upper}\cos\theta + P_{Lower}\cos\theta \\ &= 2\gamma f b\cos\theta = F_z\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(26)$$

のように，共に大気圧 p_0 は相殺して求まり，$F_{-\eta}$ は浮力 F_z の正弦成分，F_ζ は浮力の余弦成分であることが分かる．

3. 4　o 点回りのモーメントの計算

η 方向に働く力による，o 点回りの反時計方向のモーメント M_η は，(21),(23)式それぞれの力に対するレバーを，図 2 の矩形内の細い破線を参照して求め，乗ずることにより，

$$\begin{aligned} M_\eta = &-P_{Left}^{(0)}\cos\theta\cdot\left\{\frac{f+h}{2\cos\theta}-\left(b+\frac{f+h}{2}\tan\theta\right)\sin\theta\right\} \\ &+P_{Left}^{(\gamma)}\cos\theta\cdot\left\{\left(b+\frac{f}{3}\tan\theta\right)\sin\theta-\frac{f}{3\cos\theta}\right\} \\ &+P_{Right}^{(0)}\cos\theta\cdot\left\{\frac{f+h}{2\cos\theta}+\left(b-\frac{f+h}{2}\tan\theta\right)\sin\theta\right\} \\ &+P_{Right}^{(\gamma)}\cos\theta\cdot\left\{\left(b-\frac{f}{3}\tan\theta\right)\sin\theta+\frac{f}{3\cos\theta}\right\} \\ &-P_{Upper}^{(0)}\sin\theta\cdot(f+h)\cos\theta \\ &+\left(P_{Lower}^{(0)}+P_{Lower}^{(\gamma)}\right)\cdot 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27) \end{aligned}$$

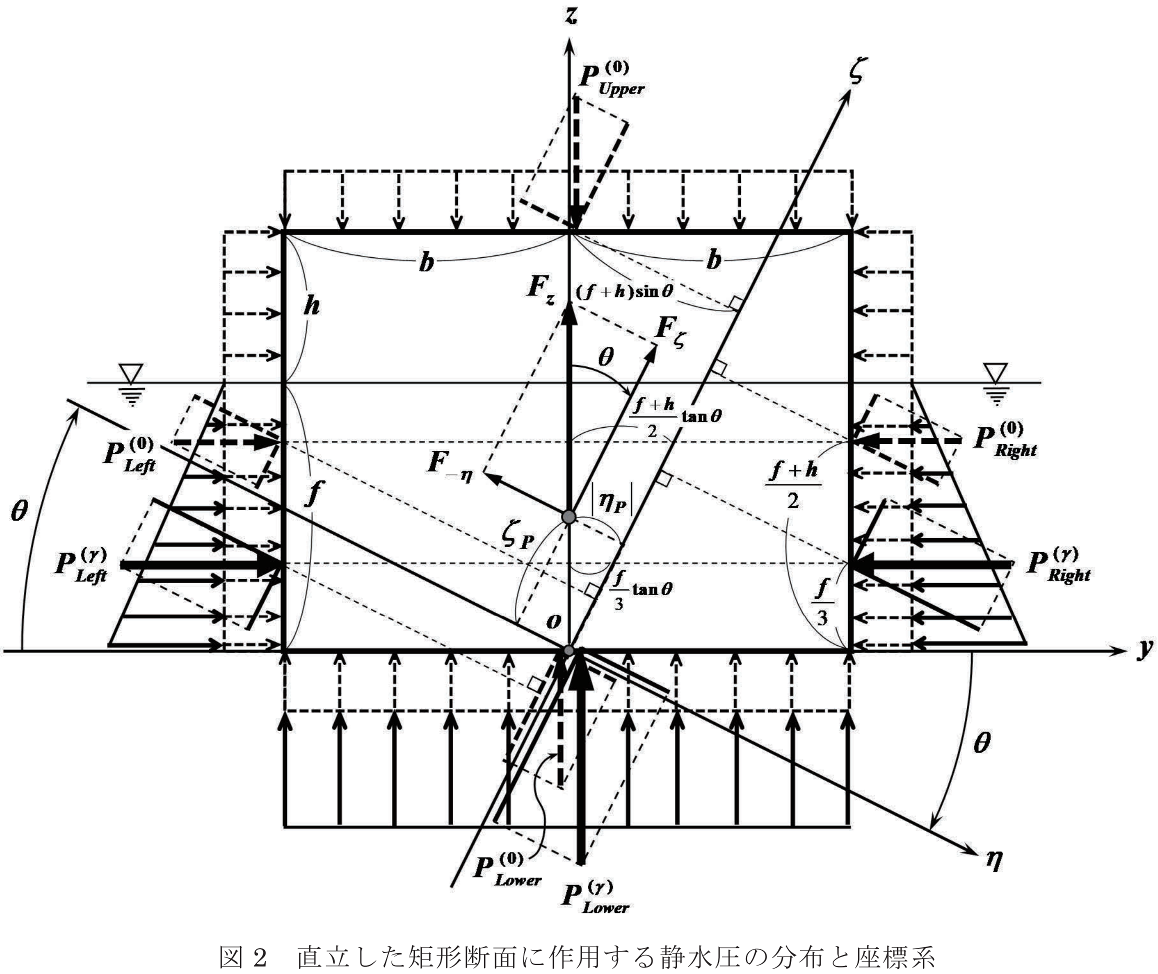

図 2　直立した矩形断面に作用する静水圧の分布と座標系

のように計算できる．ここに，(22)式の関係を用いれば，

$$
\begin{aligned}
M_\eta &= P_{Side}^{(0)}\cos\theta\cdot 2b\sin\theta \\
&\quad + P_{Side}^{(\gamma)}\cos\theta\cdot 2b\sin\theta \\
&\quad - P_{Upper}^{(0)}\sin\theta\cdot(f+h)\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(28)
\end{aligned}
$$

のように整理され，M_ηは，

$$
\begin{aligned}
M_\eta &= p_0(f+h)\cos\theta\cdot 2b\sin\theta \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma f^2\cos\theta\cdot 2b\sin\theta \\
&\quad - 2p_0 b\sin\theta\cdot(f+h)\cos\theta \\
&= \gamma f^2 b\sin\theta\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(29)
\end{aligned}
$$

のように求まる．式中，$P_{Side}^{(0)}$に関する第 1 項と$P_{Upper}^{(0)}$に関する第3項は相殺し，$P_{Side}^{(\gamma)}$ に関する第2項によって定まったことになる．

ζ 方向に働く力による，o点回りの時計方向のモーメントM_ζは，(27)式と同様，(21),(23)式それぞれの力に対するレバーを乗ずることにより，

$$
\begin{aligned}
M_\zeta &= P_{Left}^{(0)}\sin\theta\cdot\left(b+\frac{f+h}{2}\tan\theta\right)\cos\theta \\
&\quad + P_{Left}^{(\gamma)}\sin\theta\cdot\left(b+\frac{f}{3}\tan\theta\right)\cos\theta \\
&\quad + P_{Right}^{(0)}\sin\theta\cdot\left(b-\frac{f+h}{2}\tan\theta\right)\cos\theta \\
&\quad + P_{Right}^{(\gamma)}\sin\theta\cdot\left(b-\frac{f}{3}\tan\theta\right)\cos\theta \\
&\quad - P_{Upper}^{(0)}\cos\theta\cdot(f+h)\sin\theta \\
&\quad + (P_{Lower}^{(0)}+P_{Lower}^{(\gamma)})\cdot 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)
\end{aligned}
$$

のように計算できる．ここでも，M_ηと同様，(22)式の関係を用いれば，

$$
\begin{aligned}
M_\zeta &= P_{Side}^{(0)}\sin\theta\cdot 2b\cos\theta \\
&\quad + P_{Side}^{(\gamma)}\sin\theta\cdot 2b\cos\theta \\
&\quad - P_{Upper}^{(0)}\cos\theta\cdot(f+h)\sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(31)
\end{aligned}
$$

のように整理されるから，M_ζは，

$$
\begin{aligned}
M_\zeta &= p_0(f+h)\sin\theta\cdot 2b\cos\theta \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma f^2\sin\theta\cdot 2b\cos\theta \\
&\quad - 2p_0 b\cos\theta\cdot(f+h)\sin\theta \\
&= \gamma f^2 b\sin\theta\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(32)
\end{aligned}
$$

のように得られる．式中，M_ηと同様，$P_{Side}^{(0)}$に関する第 1 項と$P_{Upper}^{(0)}$に関する第 3 項は相殺し，$P_{Side}^{(\gamma)}$ に関する第2項によって求まり，大気圧p_0には依らない．

結果として，(29),(32)式から，

$$
M_\eta = M_\zeta = \gamma f^2 b\sin\theta\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(33)
$$

のように，M_ηとM_ζは，同値である．

3.5 矩形断面の圧力中心C_Pの位置決め

3.3節(26)式で求めた$F_{-\eta}$，F_ζと，3.4節(29),(32)式で計算したM_η, M_ζを用いて，2.4 節と同様，水理学の手法[17]に基づいて，静水圧による圧力中心C_Pの位置を決定する．

静水圧によるo点回りのモーメントM_η, M_ζは，それぞれC_P (η_P, ζ_P)に作用する合力$F_{-\eta}$，F_ζによって，

$$
\left.\begin{aligned}
M_\eta &= F_{-\eta}\cdot\zeta_P \\
M_\zeta &= F_\zeta\cdot\left|\eta_P\right|
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)
$$

のように計算できるから[17]，o点から圧力中心C_Pまでの$-\eta$，ζ 方向の距離$\left|\eta_P\right|$, ζ_Pは，それぞれ，

$$
\left.\begin{aligned}
\left|\eta_P\right| &= \frac{M_\zeta}{F_\zeta} \\
&= \frac{\gamma f^2 b\sin\theta\cos\theta}{2\gamma f b\cos\theta} = \frac{f}{2}\sin\theta \\
\zeta_P &= \frac{M_\eta}{F_{-\eta}} \\
&= \frac{\gamma f^2 b\sin\theta\cos\theta}{2\gamma f b\sin\theta} = \frac{f}{2}\cos\theta
\end{aligned}\right\} \cdots(35)
$$

のように，決定できる．

このθだけ回転した座標系の(η_P, ζ_P)を，元々の座標の(y_P, z_P)に変換すると，

$$
\left.\begin{aligned}
y_P &= \zeta_P\sin\theta - \left|\eta_P\right|\cos\theta \\
&= \frac{f}{2}(\cos\theta\cdot\sin\theta - \sin\theta\cdot\cos\theta) = 0 \\
z_P &= \zeta_P\cos\theta + \left|\eta_P\right|\sin\theta \\
&= \frac{f}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{f}{2}
\end{aligned}\right\} \cdots(36)
$$

のように計算され，

$$(y_P, z_P) = \left(0, \frac{f}{2} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

となり，大気圧 p_0 に依存することなく，矩形の図心として求まる[(2)]．これによって，静水圧による圧力中心 C_P が，周知の浮心位置 B と一致することを，座標系を θ だけ回転させることによっても，証明できた．

4．おわりに

第 1 報（矩形断面[(2)]），第 2 報（任意の断面形状[(10)]）に続いて，半没円柱に対しても，静水圧の圧力中心が，周知の浮心位置（半円の図心）に一致することを，証明した．

半没円柱の場合，横傾斜させても水面下の幾何学的形状が変化しないことから，結果的に，座標系を鉛直方向からズラすように回転させることよって，圧力中心の位置決めができるという，藪下ら[(13)]の主唱を例証した．

それを踏まえて，矩形断面の場合に対しても，第 1 報[(2)]とは別の証明として，直立状態のまま，座標系を回転させる手法で，圧力中心の位置決めが行なえることも示した．

謝 辞

本稿のテーマに関して，幾多の有益なご討論やご教示を頂いた，防衛大学校の鈴木 勝雄 名誉教授[(14)]，藪下 和樹 准教授[(13)]，舟艇協会の小松 正彦 評議員[(15)]に，篤く御礼申し上げます．

本研究を進めるに当たり，いつも身近に居て，常日頃から，温かいご激励や有益なご議論をして下さった，（有）実用技術研究所の慎 燦益 所長[(9)]と，長崎総合科学大学の林田 滋 名誉教授に，心より御礼を申し上げ，本稿を閉じます．

参 考 文 献

(1) Archimedes：The Works of Archimedes，On Floating Bodies，Book I & Book II，Edited and Translated by T. L. Heath，Cambridge University Press，pp.253～300, 1897.

(2) 堀　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 ― 浮心＝圧力中心の証明 ―，日本航海学会誌，第 203 号，pp.90～94, 2018 年 1 月．

(3) 小松 正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察，舟艇技報，No.93，pp.21～25，2007 年 12 月．

(4) 瀬戸 秀幸：「浮心」考 ― 小松：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察 の再検討 ―，第 14 回推進性能・運動性能合同研究会，2010 年．

(5) 瀬戸 秀幸：浮力の作用中心に関する一考察，日本船舶海洋工学会 講演会論文集，第 12 号，pp.529～532，2011 年 5 月．

(6) 鈴木 勝雄：神説「浮心の法則」，2011 年 1 月．

(7) 小松 正彦：座標変換による浮力の作用中心に関する考察，第 19 回推進性能・運動性能合同研究会，2012 年．

(8) 渡辺 倫堂：船体周りの圧力分布と浮心の関係に関する研究，防衛大学校 機械システム工学科 船舶工学講座 卒業論文，（指導）藪下和樹，岡畑 豪，pp.1～25，2013 年 3 月．

(9) 慎 燦益：造船幾何学 ― 造船設計の基礎知識 ―，第 4 章 排水量等計算と曲線図，4.2 アルキメデスの原理，海文堂，pp.125～133，2013 年 2 月（初版）．

(10) 堀　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 ― その 2：任意の断面形状の場合 ―，日本航海学会誌，第 205 号，pp.28～34，2018 年 7 月．

(11) 一色 浩：Pressure Center，2018 年 3 月．

(12) 藪下 和樹：船舶の復原 及び 推進性能（2018 年度版），第 4 章 浮力と圧力分布の関係，防衛大学校 機械システム工学科 テキスト，pp.81～90，2018 年 4 月．

(13) 藪下 和樹，日比 茂幸，岡畑 豪：物体周りの圧力分布による浮心位置の同定，第 10 回推進・運動性能研究会，pp.1～14，2018 年 6 月．

(14) 鈴木 勝雄：見かけの浮心について ― 堀論文[(2)]に関連して ―，2018 年 4 月．

(15) 小松　正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察（続報），舟艇技法，第 136 号，pp.12〜18，2018 年 12 月．

(16) 堀　　勉：「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開 ― その 1：「浮心＝圧力中心」の証明 ―，舟艇技法，第 135 号，pp.1〜10，2018 年 9 月．

(17) 大串　雅信：理論船舶工学（上巻），1.3 浮力の例題，海文堂，pp.4〜5，1971 年 6 月（初版）．

平成 31 年 2 月 8 日 投稿

堀（ホリ）　　勉（ツトム）
正会員　長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授（〒851-0193 長崎市 網場町 536）
E-mail：HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp，HomePage：http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/
1987 年 大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了，工学博士
所属学会：日本航海学会，日本船舶海洋工学会の各会員；　研究テーマ：水面波動力学

学術刊行物　ISSN 0919−9985

日本航海学会誌　**NAVIGATION**

平成31年4月　第208号　　APR 2019 No. 208

日 本 航 海 学 会
Japan Institute of Navigation
c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN