

第4章 梁の撓み振動（連続体の振動（その2））

この章では、連続体の振動として、梁（細長い弾性棒）の撓み振動について解析する。前章の弦の振動の場合より、微分方程式の取り扱いが多少複雑になるが、この梁（特に、両端自由の境界条件を課した場合）の振動モードを解析することにより、

船舶に代表される細長い浮体の振動特性の概略を知ることができるから、船舶工学科の学生にとっては、是非修得して載きたい問題である。

§4.1 梁の撓み振動方程式

ここでは、梁の振動方程式を導くために、Fig.4.1 に示すように、梁が撓んだ状態を考える。空間に固定した座標系として、水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸を、振動する梁

に固定した座標系として、梁の中性軸（断面の図心を連ねた線）に沿って ξ 軸、これに垂直上向きに η 軸、断面内に ζ 軸を取る（Fig.4.2）。従って、梁に何の撓みも生じないときは、 ξ 軸は x 軸に、 η 軸は y 軸に、一致することになる。また、梁の撓みによる、 ξ 軸の変位量を $\tilde{y}(x, t)$ とするが、この変形によっても、中性軸である ξ 軸（正確には、 $\eta = 0$ なる $\xi\zeta$ 面）は伸び縮みをせず、また断面の $\eta\zeta$ 面は、変形後も平面を維持し、且つ、 ξ 軸と直交するものと仮定する。（これを、“Bernoulli の仮定”と呼ぶことは、材料力学で習ったことであろう。）なお、解析に当たって、撓みは曲げモーメントのみによって生ずるものとする。厳密には、剪断力によっても、撓み曲線に傾斜が生じるが、梁が細長い（梁のスパンに比して、断面の深さが、十分に小さい場合。）限り、この影響は無視できるからである。ここに、梁の単位長さ当たりの重量を γ 、材料の Young 率を E とする。

今、Fig.4.1 に示す向きの曲げモーメントによって、中性軸 ξ 軸を挟んで、 $\eta > 0$ なる上の部分は伸び、 $\eta < 0$ なる下の部分は縮むことになる。このとき、中性軸上の $\delta\xi$ の長さが、 $\eta = \eta$ では $\delta\xi'$ になったとすると、このとき、 ξ 軸までの曲率半径を ρ とすると、そのときの伸び $\Delta(\delta\xi)$ は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\delta\xi) &= \delta\xi' - \delta\xi = \eta \delta\theta \\ \text{但し、} \begin{cases} \delta\xi = \rho \delta\theta \\ \delta\xi' = (\rho + \eta) \delta\theta \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.1)$$

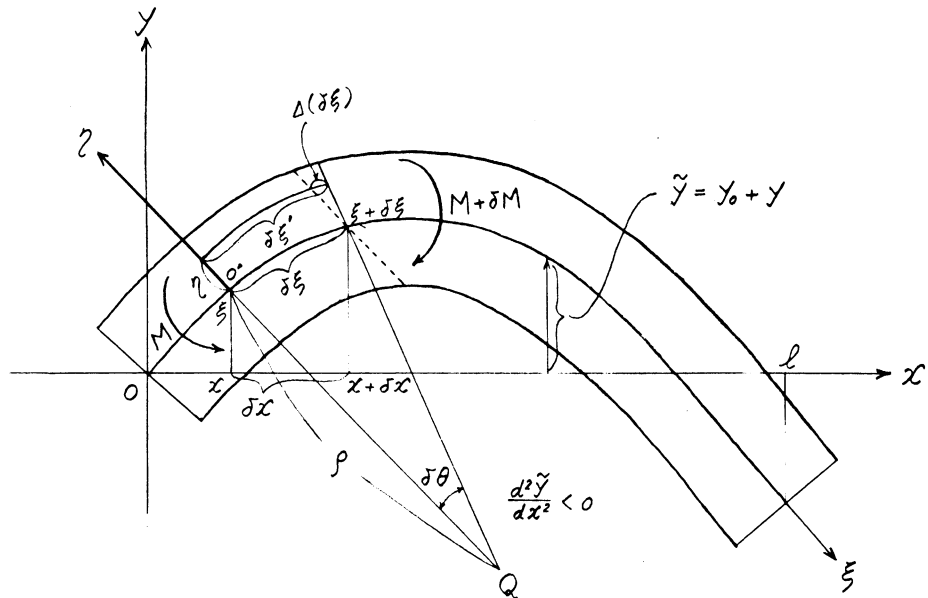


Fig. 4.1

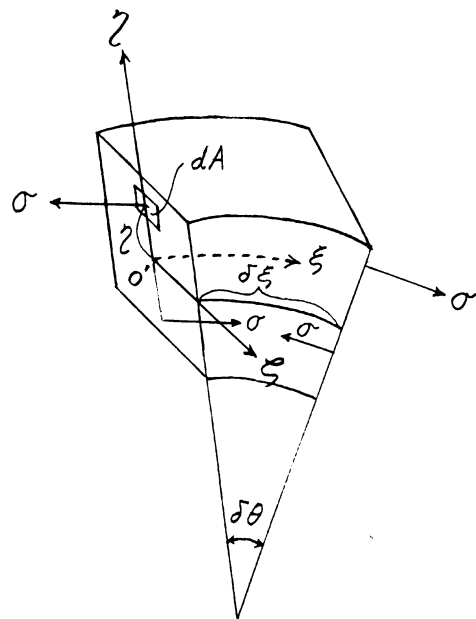


Fig. 4.2

となる。そのときの、歪み ε は、

$$\varepsilon = \frac{\Delta(\delta\xi)}{\delta\xi} = \frac{\eta}{\rho} \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

となるから、応力 σ は、材料の Young 率 E を介して、

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho}\eta \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

となる。ここに、Fig.4.2 に示すように、この曲げ応力の ξ 軸まわりのモーメントを、 $\eta\xi$ 断面に互って積分することにより、内力としての曲げモーメント M が、

$$\left. \begin{aligned} M &= \iint_A \eta \cdot \sigma dA = \frac{E}{\rho} \iint_A \eta^2 d\eta d\xi = \frac{EI}{\rho} \\ \text{但し、} I &= \frac{E}{\rho} \iint_A \eta^2 d\eta d\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

のように求まる。ここに、式中の曲率半径 ρ を、中性軸の撓み変位 $\tilde{y}$ で表わすことを考えよう。

ここでは、解析の便利のため、撓みが下に凸な場合を考え、Fig.4.3 に示すように、 ξ 軸上の点 P における接線の傾斜角を θ 、 $\delta\xi$ だけ離れた点 P' での傾斜角を $\theta + \delta\theta$ とすると、その両者の接線と直交する法線の交点 Q が曲率の中心となり、その半径 PQ が曲率半径 ρ である。幾何学的な関係から、挟み角は $\delta\theta$ となるから、曲率半径 ρ は、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\delta\xi}{\delta\theta} = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}} \approx \frac{1}{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}} \quad \dots\dots(4.5) \end{aligned}$$

となる。したがって、撓みの傾斜が小さい場合は、上式が示すように、その曲率 $\frac{1}{\rho}$ は、撓みの 2 階微分係数 $\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}$ で表わされることが分

かる。なお、式中の $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ は、 $\delta\xi = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta\tilde{y})^2}$ より、また $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ は、 $\tan\theta = \frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}$ の両辺を x で偏微分することにより、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

のように、求めたものである。このことから、(4.4)式の曲げモーメント M は、小撓み $|\tilde{y}| \ll 1$ を仮定する限り、

$$M = \frac{EI}{\rho} = -EI \frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

のように、書くことができる。(ここまでは、材料力学の復習である。) なお、式中の負号は、Fig.4.1 のように、曲げモーメントの向きを正に取った場合、その撓みは上に凸となっていて、この図とは逆に、負の曲率を有するためである。

以上の準備を踏まえて、Fig.4.4 に示すように、 ξ と $\xi + \delta\xi$ との間にある梁の微小部分 $\delta\xi$ を切り出して、運動方程式を立てよう。このときも、弦の場合と同様、変位 $\tilde{y}(x, t)$ が十分小さく

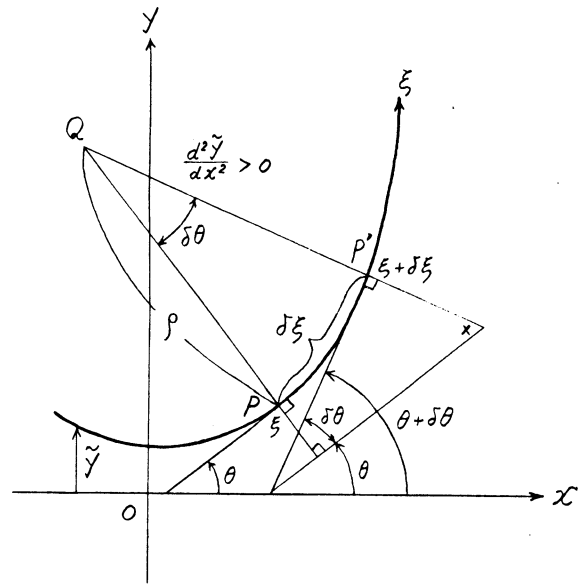


Fig. 4.3

($|\tilde{y}| \ll 1$)，梁が細長いとすれば，梁は上下方向 (y) にのみ運動し， ξ 軸回りの回転運動は，無視してよい。実際，それぞれの方向の運動方程式は，

$$\left. \begin{aligned} \text{[上下 (y) 方向]} \quad & \frac{\gamma \delta \xi}{g} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = (F + \delta F) - F - \gamma \delta \xi \\ & = \delta F - \gamma \delta \xi = \frac{\partial F}{\partial \xi} \delta \xi - \gamma \delta \xi \\ \text{[回転 (}\xi\text{軸回り)]} \quad & 0 = (M + \delta M) - M - (F + \delta F) \delta \xi + \gamma \delta \xi \cdot \frac{\delta \xi}{2} \\ & \approx \delta M - F \delta \xi = \frac{\partial M}{\partial \xi} \delta \xi - F \delta \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.8)$$

のようになる。但し，後者については，断面の回転運動は無視できることから，加速度項はゼロとなり，モーメントは静的に平衡していることになる。両式を $\delta \xi$ で除すことにより，

$$\left. \begin{aligned} \text{[上下 (y) 方向]} \quad & \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial \xi} - \gamma \\ \text{[回転 (}\xi\text{軸回り)]} \quad & F = \frac{\partial M}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.9)$$

となる。第2式の結果は，定常問題としての材料力学の教えるところであり，剪断力 F は，曲げモーメント M の微係数で与えられることになる。従って，式中の F 及び $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ は，(4.7)式の関係から，撓み $\tilde{y}$ を使って，

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\partial M}{\partial \xi} \approx \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.10)$$

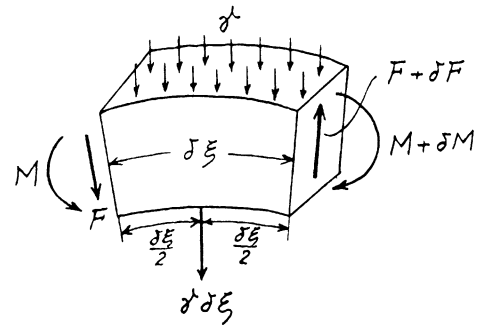


Fig. 4.4

のように，表わし得る。これは，(4.6)式により，小撓み ($|\tilde{y}| \ll 1$) の状態では， $\frac{\partial \xi}{\partial x} \approx 1$ となるから， ξ に関する微分を x で置き換えたことによる。ここに，梁の材質と断面形状が，スパン長 ℓ に互って一様であるとすれば，Young 率 E と，断面2次モーメント I は，定数となって，上式は，それぞれ，

$$\left. \begin{aligned} F &= -EI \frac{\partial^3 \tilde{y}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -EI \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial x^4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(但し, } EI = \text{Const. な場合)} \\ & \dots\dots\dots(4.11) \end{aligned}$$

のように，簡単になる。

以上の結果，梁の上下方向の撓み振動方程式は，(4.10)式の関係を用いて，(4.9)式の第1式に採用することにより，

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right) + \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots(4.12)$$

となる。例えば，船体を梁と見做して振動の解析を行なう際には，曲げ剛性 EI は，横断面によって異なり， EI は船長方向 x の関数となり，解析は区分的に行なう必要がある。ここでは，簡単のために， $EI = \text{Const.}$ とすれば，梁の全撓み $\tilde{y} (= y_0 + y)$ に対する振動方程式は，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial x^4} + \gamma &= 0 \\ & \text{(但し, } EI = \text{Const. な一様断面梁)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.13)$$

のように，書き表わされる。以下，梁の振動特性の概略を把握することを目的に，この一様断面梁について考えよう。

ここに、梁の場合も、前章の弦の場合と同様、その自重により、静的な平衡状態において、初期撓みが存在することを忘れてはならず、上式中の撓み変位 $\bar{y}(x, t)$ は、

$$\bar{y}(x, t) = y_0(x) + y(x, t) \quad \dots\dots\dots(4.14)$$

のように、初期撓み $y_0(x)$ による定常成分と、振動による周期的な変動成分 $y(x, t)$ の重畳として得られるのである。これを、(4.12)式に代入して、時間 t に依存しない項と、依存する項に分けて表示れば、

$$EI \left(\frac{d^4 y_0}{dx^4} + \frac{\gamma}{EI} \right) + \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI g}{\gamma} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(4.15)$$

を得る。ここに、第1項が定常成分、第2項が変動成分を表わし、それぞれの括弧内がゼロになれば、上式を満足させ得るから、

$$\left. \begin{array}{l} \text{[定常成分]} \quad \frac{d^4 y_0}{dx^4} + \frac{\gamma}{EI} = 0 \\ \text{[変動成分]} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI g}{\gamma} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.16)$$

と書ける。まず、(4.16)式の第1式を解くことにより、梁の初期撓みが求まり、第2式から、振動変位が求まることになる。実際、定常成分に対する常微分方程式は、 x に関して単純に4階積分することにより、簡単に解けて、初期撓み $y_0(x)$ は、

$$y_0(x) = -\frac{\gamma}{24EI} x^4 + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_1 x + c_0 \quad \dots\dots\dots(4.17)$$

のような4次曲線で表わされることが分かる。ここでは、一例として、片持ち梁の場合を考え、左端で固定、右端で自由の条件を設定し、4個の積分定数を決定してみる。まず、左端 ($x=0$) で固定されていることから、 $x=0$ において、撓みと、その傾斜がゼロであり、

$$y_0 \Big|_{x=0} = \frac{dy_0}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \dots\dots\dots(4.18)$$

の条件を満たすように、未定の積分定数 c_0, c_1 を決定すれば、

$$c_0 = c_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(4.19)$$

となる。次に、右端 ($x=\ell$) で自由であるから、 $x=\ell$ で、内力としての、曲げモーメント M_0 と、剪断力 F_0 が生じないことになるが、その条件を、(4.7)式と(4.11)式の関係から、 y_0 に関して記述すれば、

$$\left. \begin{array}{l} M_0 \Big|_{x=\ell} = -EI \frac{d^2 y_0}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ F_0 \Big|_{x=\ell} = -EI \frac{d^3 y_0}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.20)$$

となるから、未定定数 c_2, c_3 は、

$$\left. \begin{array}{l} c_2 = -\frac{\gamma \ell^2}{2EI} \\ c_3 = \frac{\gamma \ell}{EI} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.21)$$

のように定まる。この結果、片持ち梁の自重による初期撓み y_0 は、

$$y_0(x) = -\frac{\gamma}{24EI} x^2 (x^2 - 4\ell x + 6\ell^2) \quad \dots\dots\dots(4.22)$$

のように、決定される。また、最大撓み $y_0 \Big|_{\max}$ は、自由端 ($x=\ell$) で生じ、その大きさは、

$$y_0 \Big|_{\max} = y_0 \Big|_{x=\ell} = -\frac{\gamma \ell^4}{8EI} \quad \dots\dots\dots(4.23)$$

であって、梁の曲げ剛性 EI が大きいほど、撓みが小さいことが分かる。負号は、撓みが下方方向に

生じることを示すものであり、学生諸君は、この結果が、材料力学の教科書と一致していることを、確かめておいて下さい、

一方、一様断面梁の変動成分 $y (= \tilde{y} - y_0)$ に対する撓み振動方程式は、(4.16)式の第2式において、 $\frac{EIg}{Y} = k^4$ と置けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= 0 \\ \text{但し、} k &\equiv \sqrt{\frac{EIg}{Y}} \text{ なる一様断面梁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.24)$$

となり、これを解けば、振動による変位 $y(x, t)$ が、求まることになる。但し、(3.14)式の弦の場合と異なり、 x に関しては、4階の偏微分方程式となっている。

§ 4.2 撓み振動方程式の解法

ここでは、(4.24)式の振動方程式を解くことにより、梁の撓み振動による変位 $y(x, t)$ を定めることを考えよう。

さて、弦の場合の(3.15)式と同様に、振動の形を決定する x のみの正規関数 (Normal Function) を $Y(x)$ として、

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t - \delta) \dots\dots\dots(4.25)$$

のような、変数分離形を仮定して、解き進めることにする。まず、これを(4.24)式に代入すれば、

$$\left(-\omega^2 Y(x) + k^2 \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \right) \cos(\omega t - \delta) = 0 \dots\dots\dots(4.26)$$

となり、これを時間 t に拘わらず、恒等的に満たすためには、 $\cos(\omega t - \delta)$ を除く因数=ゼロとなる必要があるから、正規関数 $Y(x)$ が、

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2}{k^2} Y(x) = 0 \dots\dots\dots(4.27)$$

を満たせばよいことになる。この4階微分方程式の素解として、

$$Y(x) = R e^{\beta x} \dots\dots\dots(4.28)$$

のような指数関数の形を仮定する。これを、(4.27)式に代入すると、

$$\left(\beta^4 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) R e^{\beta x} = 0 \dots\dots\dots(4.29)$$

となり、上式を恒等的に満たすためには、括弧内=ゼロとなればよいから、

$$\beta^2 = \pm \frac{\omega}{k} \dots\dots\dots(4.30)$$

の関係を得る。これから、 β を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \pm \lambda, \pm i \lambda \\ \text{但し、} \lambda &\equiv \sqrt{\frac{\omega}{k}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.31)$$

となる。ここに、式中の i は、 $i = \sqrt{-1}$ で定義される虚数単位である。従って、(4.27)式の一般解は、上記4個の β に対する素解の線型結合として、

$$Y(x) = R'_1 e^{\lambda x} + R'_2 e^{-\lambda x} + R'_3 e^{i\lambda x} + R'_4 e^{-i\lambda x} \dots\dots\dots(4.32)$$

のように求まる。式中の R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 は、任意定数である。ここに、以後の解析の便利のため、それぞれの素解を、

$$\left. \begin{aligned} e^{\lambda x} &= \cosh \lambda x + \sinh \lambda x, & e^{i\lambda x} &= \cos \lambda x + i \sin \lambda x \\ e^{-\lambda x} &= \cosh \lambda x - \sinh \lambda x, & e^{-i\lambda x} &= \cos \lambda x - i \sin \lambda x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.33)$$

の関係をを用いて、偶関数 ($\cosh \lambda x, \cos \lambda x$) と奇関数 ($\sinh \lambda x, \sin \lambda x$) に分けて書き換えると、にする。

$$\begin{aligned} Y(x) &= (R'_1 + R'_2) \cosh \lambda x + (R'_1 - R'_2) \sinh \lambda x + (R'_3 + R'_4) \cos \lambda x + i (R'_1 - R'_2) \sin \lambda x \\ &= R_1 \cosh \lambda x + R_2 \sinh \lambda x + R_3 \cos \lambda x + R_4 \sin \lambda x \dots\dots\dots(4.34) \end{aligned}$$

となる。ここに、 R_1, R_2, R_3, R_4 は、新たに置き換えた任意定数であり、次節に示すように、境界条件から決定される。よって、(4.24)式の撓み振動方程式の一般解 $y(x, t)$ は、(4.25)式により、

$$y(x, t) = (R_1 \cosh \lambda x + R_2 \sinh \lambda x + R_3 \cos \lambda x + R_4 \sin \lambda x) \cos(\omega t - \delta) \quad \dots\dots\dots(4.34)$$

の形となる。

§ 4.3 両端自由の場合の撓み振動

ここでは、船体の振動状態を想定して、境界条件として、両端自由な場合について考えよう。このとき、

$$\left. \begin{array}{l} F = M = 0 \quad \text{on 左端}(x=0) \\ F = M = 0 \quad \text{on 右端}(x=\ell) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.35)$$

となる。このように、梁が水面に浮かんでいる場合、全長に亘って重量分布 w や、断面形状 I が一様な梁が水面に浮かんでいる場合、局所的にも、自重と浮力が釣り合って、浮かんでいることから、静的な撓みは生じず $y_0(x) = 0$ であり、この場合は、振動変位 y が、全撓みに等しくなって、 $\tilde{y}(x, t) = y(x, t)$ である。

以下、両端自由の境界条件を満足するように、(4.34)式の $Y(x)$ 中の λ を決定する。ここに、式(4.35)式の F (剪断力) = M (曲げモーメント) = ゼロの条件は、(4.7),(4.11)式の関係から振動変位 y によって、更に、(4.25)式の正規関数 $Y(x)$ を用いて、

$$\left. \begin{array}{l} M = -EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \cos(\omega t - \delta) = 0 \\ F = -EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} = -EI \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \cos(\omega t - \delta) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.36)$$

のように、書くことができるから、結局、両端 ($x = 0, \ell$) において、 $Y(x)$ が、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 \quad \text{on 左端}(x=0) \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 \quad \text{on 右端}(x=\ell) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.37)$$

を、満たせばいいことが分かる。ここに、 $Y(x)$ は(4.34)式の形で与えられるから、 $\frac{d^2 Y}{dx^2}, \frac{d^3 Y}{dx^3}$ は、それぞれ、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \lambda^2 (R_1 \cosh \lambda x + R_2 \sinh \lambda x - R_3 \cos \lambda x - R_4 \sin \lambda x) = 0 \\ \frac{d^3 Y}{dx^3} = \lambda^3 (R_1 \sinh \lambda x + R_2 \cosh \lambda x + R_3 \sin \lambda x - R_4 \cos \lambda x) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.38)$$

のように計算できる。従って、左端 ($x=0$) の条件から、それぞれ、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=0} = R_1 - R_3 = 0 \\ \frac{1}{\lambda^3} \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=0} = R_2 - R_4 = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.39)$$

の関係を、

$$\left. \begin{array}{l} R_3 = R_1 \\ R_4 = R_2 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.40)$$

となる。従って、(4.34)式から、 R_3, R_4 を消去できて、 $Y(x)$ は、

$$Y(x) = R_1 (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) + R_2 (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \quad \dots\dots\dots(4.41)$$

のように表現できる。次に、右端 ($x=\ell$) の条件は、(4.38)式において $x=\ell$ とし、更に、(4.40)式の関係を用いることにより、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=\ell} &= R_1 (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) + R_2 (\sinh \lambda \ell - \sin \lambda \ell) = 0 \\ \frac{1}{\lambda^3} \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=\ell} &= R_1 (\sinh \lambda \ell + \sin \lambda \ell) + R_2 (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.42)$$

のように、書くことができる。上式より、 R_2 と R_1 の比 $\frac{R_1}{R_2}$ を求めると、

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell}{\sinh \lambda \ell - \sin \lambda \ell} = -\frac{\sinh \lambda \ell + \sin \lambda \ell}{\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell} \dots\dots\dots(4.43)$$

となり、この場合 λ は、

$$(\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell)^2 = \sinh^2 \lambda \ell - \sin^2 \lambda \ell \dots\dots\dots(4.44)$$

のような関係を満足する必要があることが分かる。ここに、双曲線関数と三角関数に関する

$$\left. \begin{aligned} \cosh^2 \lambda \ell - \sinh^2 \lambda \ell &= 1 \\ \sin^2 \lambda \ell + \cos^2 \lambda \ell &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.45)$$

の性質を用いることにより、 λ に関して、

$$\cosh \lambda \ell \cdot \cos \lambda \ell = 1 \dots\dots\dots(4.46)$$

のような方程式を得る。一方、(4.43)式の前者の関係から、(4.41)式の正規関数 $Y(x)$ は、 R_1 のみを用いて、

$$Y(x) = R_1 \left\{ \cosh \lambda x + \cos \lambda x - \frac{\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell}{\sinh \lambda \ell - \sin \lambda \ell} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \right\} \dots\dots\dots(4.48)$$

のように表現できることが分かる。

ここに、(4.46)式の方程式を解いて、 λ を決定するためには、

$$\cos \lambda \ell = \frac{1}{\cosh \lambda \ell} \dots\dots\dots(4.49)$$

の形で扱うと、考え易い。上式は、Fig.4.5 に示すように、横軸に $\lambda \ell$ 、縦軸に $\cos \lambda \ell$ 及び $\frac{1}{\cosh \lambda \ell}$ の値を取ってプロットすれば、その両曲線の交点の $\lambda \ell$ を求める問題に帰着される。同図より分かるように、両線の交点の横座標は、近似的に $\cos \lambda \ell$ の曲線が横軸と交わる、

$$\cos \lambda \ell = 0 \dots\dots\dots(4.50)$$

を満たす点の座標としても差し支えないから、 $\lambda \ell$ の近似値として、直ちに、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \ell &\approx \frac{3}{2} \pi (=4.7124), \lambda_2 \ell \approx \frac{5}{2} \pi (=7.8540), \lambda_3 \ell \approx \frac{7}{2} \pi (=10.9956), \\ \lambda_4 \ell &\approx \frac{9}{2} \pi (=14.1372), \dots\dots\dots, \lambda_n \ell \approx \frac{2n+1}{2} \pi \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.51)$$

が、得られる。(4.49)式の厳密解を求めるには、上記の近似値を初期値して、

$$\lambda \ell \Big|_{j+1} = \lambda \ell \Big|_j + \frac{\cos \lambda \ell \Big|_j - \frac{1}{\cosh \lambda \ell \Big|_j}}{\sin \lambda \ell \Big|_j - \frac{\tanh \lambda \ell \Big|_j}{\cosh \lambda \ell \Big|_j}} \dots\dots\dots(4.52)$$

のような Newton-Raphson 法を用いれば、ほんの数回の繰り返し計算によって、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \ell = 4.7300, \lambda_2 \ell = 7.8532, \lambda_3 \ell = 10.9956, \\ \lambda_4 \ell = 14.1372, \lambda_5 \ell = 17.2788, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.53)$$

なる解を、得ることができる。この結果を見れば、(4.51)式の近似値が、非常に良い近似解となっていることが分かる。特に、 $\lambda_3 \ell$ 以降は、小数点以下 4 桁の範囲では、厳密解と完全に一致しているから、実用的には、(4.51)式の解で充分と考えられる。

このとき、(4.48)式において、それぞれの振動モード n に対応して、

$$\alpha_n \equiv -\frac{R_2}{R_1} = \frac{\cosh \lambda_n \ell - \cos \lambda_n \ell}{\sinh \lambda_n \ell - \sin \lambda_n \ell} \dots\dots\dots(4.54)$$

と置き、振幅に相当する任意定数 R_1 を、振動モード n との対応させて、改めて R_n と書けば、(4.48)式の正規関数 $Y(x)$ も、振動モード n に対応する形で、 $Y_n(x)$ となって、

$$Y_n(x) = R_n \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x + \alpha_n (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \dots\dots\dots(4.55)$$

のように書くことができ、その係数 α_n は、(4.53)式のそれぞれの $\lambda_n \ell$ に対して計算すれば、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 0.9825, \alpha_2 = 1.0008, \alpha_3 = 1.0000, \\ \alpha_4 = 1.0000, \alpha_5 = 1.0000, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.56)$$

となる。この結果から、 α_n は概ね 1 の値を取ることが分かるが、これは、(4.53)式のようなある程度大きな $\lambda_n \ell$ に対しては、 $\sinh \lambda_n \ell \gg 1$, $\cosh \lambda_n \ell \gg 1$ となって、 $\sin \lambda_n \ell$, $\cos \lambda_n \ell$ の項に支配的となることから、(4.54)式の α_n は、漸近的に

$$\alpha_n \approx \frac{1}{\tanh \lambda_n \ell} \approx 1 \dots\dots\dots(4.57)$$

によって計算することができるからである。式中、このとき $\tanh \lambda_n \ell \approx 1$ となることを用いた。

このとき、振動モード n の振動数 ω_n は、(4.31)式の関係により、 $\lambda_n \ell = \ell \sqrt{\frac{\omega}{k}}$ が成立するから、

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \frac{k(\lambda_n \ell)^2}{\ell^2} \\ &= \frac{(\lambda_n \ell)^2 \sqrt{\frac{EIg}{\gamma}}}{\ell^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.58)$$

となる。したがって、対応するモード n の振動変位 y_n は、

$$y_n(x, t) = Y_n(x) \cos(\omega_n t - \delta) \dots\dots\dots(4.59)$$

となる。ここに、(4.24)式の撓み振動方程式は、 y に関して線型であるし、(4.38)式の両端自由の境界条件も、右辺=ゼロの形だから、結局、この場合の振動変位 y は、それぞれの振動モードに対する上式の変位 y_n の重畳によって、

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cos(\omega_n t - \delta_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left[\cosh \left(\lambda_n \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) + \cos \left(\lambda_n \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) + \alpha_n \left\{ \sinh \left(\lambda_n \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) + \sin \left(\lambda_n \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) \right\} \right] \\ &\quad \times \cos \left(\frac{k(\lambda_n \ell)^2}{\ell^2} t - \delta_n \right) \dots\dots\dots(4.60) \end{aligned}$$

のように、表わされることになる。式中の任意定数 R_n , δ_n は、それぞれの振動モードに対する振幅と位相遅れ角に相当するもので、初期条件から定められるものである。