

第3章 弦の振動 (連続体の振動 (その1))

この章では、連続体の振動として、弦の横振動について解析する。前章では、自由度が2の場合の振動について扱ったが、その自由度を無限に増やした、“振動モード” = ∞ の場合が、“連続体”の振動を表わすことを示す。また、弦の振動方程式が、所謂“波動方程式”となっていることを示し、その初期値問題を解くために、Fourier 解析の手法を導入する。

§3.1 弦の横振動方程式

まず、Fig.3.1 に示すような、2点間に張られた弦の横振動を考える。このとき、弦上の点の変位 \tilde{y} は、座標 x と時間 t の2変数関数 $\tilde{y}(x, t)$ である。 x と $x + \delta x$ との間にある弦の微小部分 δs を切り出して、

運動方程式を立てよう。この際、弦の変位 \tilde{y} は十分小さいとすると、運動は上下方向 (y) にのみ、運動していると考えてよい。そこで、微小部分 δs の左端 ($x = x$) での傾斜角を θ 、張力を T 、右端 ($x = x + \delta x$) で

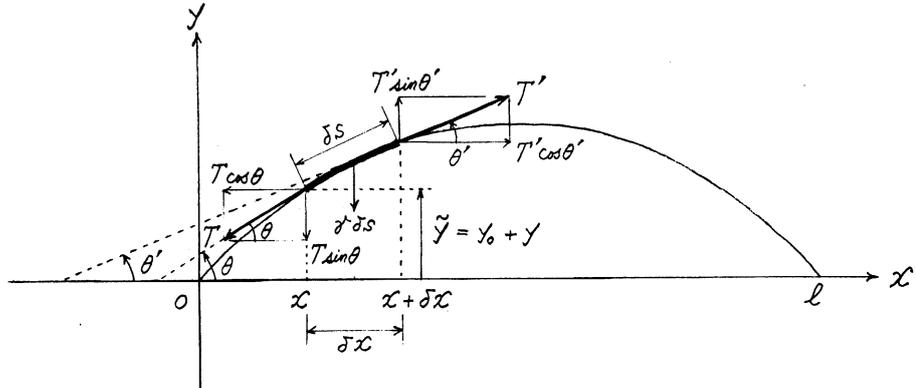


Fig. 3.1

のそれぞれを、 θ' , T' とし、弦の単位長さ当たりの重量を γ とする。

このとき、上下 (y) ならびに左右 (x) 方向の運動方程式は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \text{[上下 (y) 方向]} \quad \frac{\gamma \delta l}{g} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} &= T' \sin \theta' - T \sin \theta - \gamma \delta s \\ \text{[左右 (x) 方向]} \quad T' \cos \theta' - T \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

のようになる。但し、左右方向 (x) については、運動しないことから加速度の項はゼロとなり、力は静的に平衡している。ここに、 T' , δl に関する

$$\left. \begin{aligned} T' &= T + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x \\ \delta s &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \delta x = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right\} \delta x \approx \delta x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

と、弦の傾斜角 θ , θ' に関する

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &\approx \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \\ \sin \theta' &= \sin \theta + \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial x} \delta x \approx \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \delta x \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{\tan^2 \theta}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\right)^2 \approx 1 \\ \cos \theta' &= \cos \theta + \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} \delta x \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \delta x \approx 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

の関係を (3.1) 式に用い、 $(\delta x)^2$ の項を捨て、 δx の1次の項まで整理して記せば、

$$\left. \begin{aligned} \text{[y方向]} & \left\{ \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \gamma + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \right) \right\} \delta x = 0 \\ \text{[x方向]} & \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} - T \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \right\} \delta x = 0 \end{aligned} \right\} \dots(3.4)$$

となる。ここに、それぞれの変位 \bar{y} に関する非線型項は、線型項に比して、十分に小さく無視でき、また $\delta x \neq 0$ であるから、 y, x 両方向に対する方程式は、線型化されて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \gamma &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(3.5)$$

となる。第2式は、(3.2)式において、 $\cos \theta \approx \cos \theta' \approx 1$ と置いた結果に他ならず、これにより、張力 T は、弦長に互って一定であることが分かるから、第1式の第3項は消失して、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \gamma &= 0 \\ T(x, t) = T_0 (= \text{Const.}) & \end{aligned} \right\} \dots(3.6)$$

のように書くことができる。ここに、弦はその自重により、静的な平衡状態において、初期撓みが存在するから、変位 $\bar{y}(x, t)$ は、

$$\bar{y}(x, t) = y_0(x) + y(x, t) \dots(3.7)$$

のように、初期撓み $y_0(x)$ による定常成分と、振動による周期的な変動成分 $y(x, t)$ の和から成っていることに、注意する必要がある。(これは、教科書 *etc.* に余り明記されていないが、振動の問題を解析するに当たって、極めて重要な意味を持つことが、後に理解されるであろう。) これを、(3.6)式に代入して、時間 t に依存しない項と、依存する項に分離して整理すれば、

$$T_0 \left(\frac{d^2 y_0}{dx^2} - \frac{\gamma}{T_0} \right) - \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0 g}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \dots(3.8)$$

を得る。ここに、第1項が定常成分、第2項が変動成分を表わし、それぞれの括弧内がゼロになれば、上式を満足させ得るから、

$$\left. \begin{aligned} \text{[定常成分]} & \frac{d^2 y_0}{dx^2} - \frac{\gamma}{T_0} = 0 \\ \text{[変動成分]} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0 g}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots(3.9)$$

と書ける。まず、(3.9)式の第1式を解くことにより、弦の初期撓みが求まり、第2式から、振動変位が求まることになる。実際、定常成分に関する微分方程式は簡単に解けて、初期撓み $y_0(x)$ は、

$$y_0(x) = \frac{\gamma}{2T_0} x^2 + c_1 x + c_0 \dots(3.10)$$

のような2次曲線で表わされることが分かり、この節では、弦の変位 \bar{y} は十分小さいとして、解析を進めてきたため、厳密には"懸垂曲線" (*Catenary*) となるべき撓みが、近似的に、2次曲線で表わされたものである。ここに、弦が両端で固定されているとして、 $y_0(0) = y_0(\ell) = 0$ の条件を満たすように、未定の積分定数 c_0, c_1 を決定すれば、

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= -\frac{\gamma \ell}{2T_0} \end{aligned} \right\} \dots(3.11)$$

となり、初期撓み $y_0(x)$ は、

$$y_0(x) = -\frac{\gamma}{2T_0}x(\ell-x) \dots\dots\dots(3.12)$$

のように決定される。また、最大撓み $y_0]_{max}$ は、弦の中央 ($x = \frac{\ell}{2}$) で生じ、

$$y_0]_{max} = y_0\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\gamma\ell^2}{8T_0} \dots\dots\dots(3.13)$$

であり、初期張力 T_0 が大きいほど、撓みが小さいことが分かる。一方、弦の横振動の方程式は、(3.9)式の第2式において、 $\frac{T_0g}{\gamma} = k^2$ と置けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\ \text{但し、} k &\equiv \sqrt{\frac{T_0g}{\gamma}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.14)$$

となり、波動方程式の形として得られることが分かった。

§3.2 波動方程式の解と、分散関係

ここでは、弦の振動方程式を解くことを考えよう。そこで、波動方程式の特解として、

$$y(x,t) = Y(x) \cos(\omega t - \delta) \dots\dots\dots(3.15)$$

のような、変数分離の形を仮定し、(3.14)式に代入すれば、

$$-\left(\omega^2 Y(x) + k^2 \frac{d^2 Y(x)}{dx^2}\right) \cos(\omega t - \delta) = 0 \dots\dots\dots(3.16)$$

となる。ここに、 $\cos(\omega t - \delta)$ は常にゼロとはならないから、 x だけの関数 $Y(x)$ が、

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{k^2} Y(x) = 0 \dots\dots\dots(3.17)$$

を満たせばよいことになる。ここに、 $Y(x)$ として、

$$Y(x) = R \cos(\beta x - \varepsilon) \dots\dots\dots(3.18)$$

の形を仮定すれば、

$$\left(-\beta^2 + \frac{\omega^2}{k^2}\right) Y(x) = 0 \dots\dots\dots(3.19)$$

となり、これを恒等的に満たすには、括弧内=ゼロとなる必要があるから、振動数 ω と、 k, β の間に、

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= k^2 \beta^2 \\ \rightarrow \omega &= \pm k \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.20)$$

の関係が成立する必要がある。ここでは、複号の+側を取ることに、

$$\omega = k \beta$$

し、これを分散関係という。このとき、(3.15),(3.18)式により、変位 $y(x,t)$ として、

$$y(x,t) = R \cos(\beta x - \varepsilon) \cos(k \beta t - \delta) \dots\dots\dots(3.21)$$

を得る。仮に、(3.12)複号の-側を取り、 $\omega = -k \beta$ としても、(3.15)式において $\delta = -\delta'$ とすれば、結局、上式と同一の形となるからである。この段階では、 β は任意であり、次節に示すように、境界条件を課すことにより、決定されるのである。

§3.3 与えられた条件下での弦の振動

ここでは、(3.14)式で表わされる弦の振動を、以下の条件の下に、定めることにする。

まず、初期条件は、 $t = 0$ で、弦が $y = \eta(x)$ の形で、静止しているとすれば、

$$\left. \begin{aligned} y]_{t=0} &= \eta(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}]_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.22)$$

となる。次に、境界条件として、 $x = 0$ と $x = \ell$ の両端で、固定されている場合、

$$\left. \begin{aligned} y|_{x=0} &= 0 \\ y|_{x=\ell} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.23)$$

について考える。 解析の便利のため、(3.21)式を、

$$\left. \begin{aligned} y(x,t) &= (A' \cos \beta x + B' \sin \beta x)(C \cos k \beta t + D \sin k \beta t) \\ \text{但し, } \quad A' &= R \cos \delta, \quad B' = R \sin \delta \\ \quad \quad C &= \cos \delta, \quad D = \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

の形に変形して、進めよう。 このとき、(3.22)式の初期条件の第2式は、

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = k \beta D (A' \cos \beta x + B' \sin \beta x) = 0 \dots\dots\dots(3.25)$$

のように書くことができるから、未定定数 C, D は、

$$\left. \begin{aligned} D &= 0 \rightarrow \delta = 0, \pi \\ C &= \pm 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.26)$$

のように定まり、弦の振動変位 $y(x,t)$ は、

$$\left. \begin{aligned} y(x,t) &= (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cos k \beta t \\ \text{但し, } \quad A &= \pm A', \quad B = \pm B' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.27)$$

の形となる。 次に、境界条件として、 $x=0$ と $x=\ell$ の両端で、固定されている ($y=0$) 場合について考える。 この条件は、

$$\left. \begin{aligned} y(0,t) &= A \cos k \beta t = 0 \\ y(\ell,t) &= (A \cos \beta \ell + B \sin \beta \ell) \cos k \beta t = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.28)$$

のように書くことができ、両者を、時間 t に拘わらず、恒等的に満たすためには、

$$\left. \begin{aligned} A &= 0 \\ \sin \beta \ell &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.29)$$

となる必要があることが分かる。 この結果、第2式を満たす $\beta = \beta_n$ は、

$$\left. \begin{aligned} \beta \ell &= n \pi \\ \rightarrow \beta_n &= \frac{n \pi}{\ell} \quad (\text{但し, } n=1, 2, 3, \dots\dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.30)$$

ように求まる。 この β_n が、 n 番目の振動モードに対応し、波長 $\lambda_n \left(= \frac{2\pi}{\beta_n} \right)$ との関係は、Fig. 3.2 に示す通りである。 このとき、(3.27)式の y, B を、上の n に対応させて、 y_n, b_n と書き換えることにより、

$$\left. \begin{aligned} y_n(x,t) &= b_n \sin(\beta_n x) \cdot \cos(k \beta_n t) \\ &= b_n \sin\left(\frac{n \pi}{\ell} x\right) \cdot \cos\left(\frac{k n \pi}{\ell} t\right) \\ \text{但し, } \quad n &= 1, 2, 3, \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.31)$$

のように表わされる。 これは、(3.22),(3.23)両式によって与えられた条件のうち、初期条件 $y|_{t=0} = \eta(x)$ 以外の全ての条件を満たす、波動方程式の解である。 その(3.14)式の波動方程式は、 y に関して線型であるから、この $y_n(x,t)$ を、それぞれの n について、

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \pi}{\ell} x\right) \cdot \cos\left(\frac{k n \pi}{\ell} t\right) \dots\dots\dots(3.32)$$

のように重ね合わせた $y(x,t)$ もまた、その解である。この場合、振動モードは、 $n = 1 \sim \infty$ 迄あることになり、この観点から言えば、弦のような連続体の振動は、 ∞ の自由度を有する振動として、捉えることができよう。なお、式中には、未定係数 b_n が含まれるが、これは、初期条件のうちに残る 1 個 ($y|_{t=0} = \eta(x)$) を満足するように、決定すればよい。

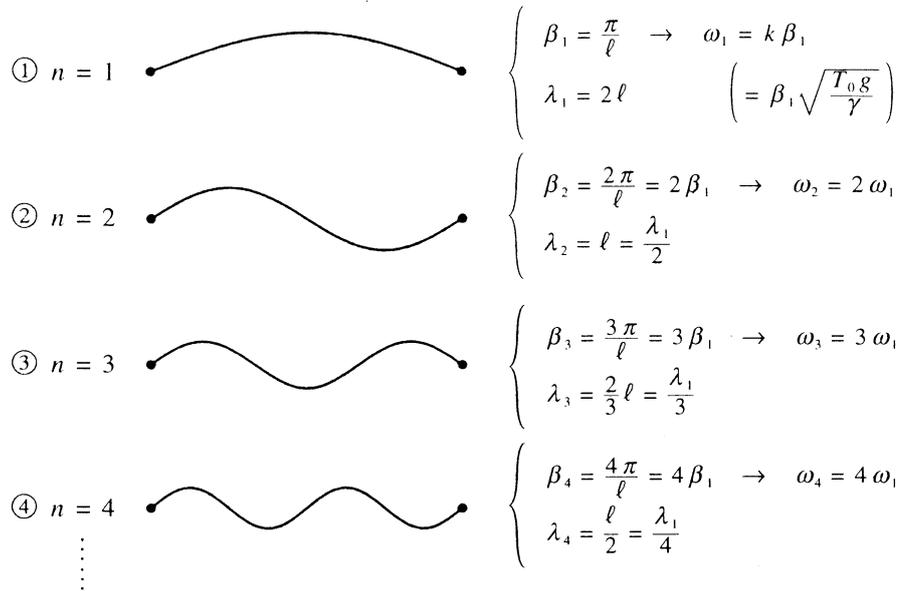


Fig. 3.2

実際、その条件は、

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) = \eta(x) \dots\dots\dots(3.33)$$

のように書ける。この式は、正に、関数 $\eta(x)$ を、半周期 ℓ の奇関数と見做して Fourier 級数に展開した "正弦級数" の形になっている。(ことが、多少なりとも、大学の数学を真面目に勉強してきた学生には、理解されるであろう。) このことから、上式の未定係数 b_n は、そのまま Fourier 係数となっていることから、直ちに、

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \eta(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \dots\dots\dots(3.34)$$

のように、決定されるのである。従って、この b_n を、(3.32)式の $y(x,t)$ に用いることにより、

$$y(x,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\ell} \eta(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right) d\xi \right\} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cdot \cos\left(\frac{kn\pi}{\ell} t\right) \dots\dots\dots(3.35)$$

を得る。この式が、(3.22),(3.23)式に示す計 4 個の初期条件、境界条件を満たす、弦の横振動の変位を与えることになる。ここに、中括弧内の積分変数は、変数 x との紛らわしさを避けるため、 ξ と記したものである。

§3.4 弦の具体的な振動例

ここでは、(3.35)式中の $y|_{t=0} = \eta(x)$ に、具体的な例を挙げて、弦の振動の様子について、検討してみよう。実際には、(3.34)式の Fourier 係数 b_n を定めることが、要点になる。

case i)

第 1 例として、弦が $t = 0$ の初期状態で、

$$\eta(x) = h \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \dots\dots\dots(3.36)$$

のように、正弦曲線状に保持されている場合を考えよう。上式は、 $\eta(0) = \eta(\ell) = 0$ となっていて、明らかに(3.23)式の境界条件を満たしている。このとき、Fourier 係数 b_n は、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2h}{\ell} \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \\ &= \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \sin X \sin nX dX = \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos(n-1)X - \cos(n+1)X \right\} dX \dots\dots\dots(3.37) \end{aligned}$$

によって計算できることになる。式中、 $X = \frac{\pi}{\ell}x$ と置き、積分変数を x から X に変換したものである。ここに、 $n = 1$ の場合と、それ以外 ($n \neq 1$) の場合に分けて進めると、

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{h}{\pi} \int_0^\pi \{1 - \cos 2X\} dX = \frac{h}{\pi} \left[X - \frac{\sin 2X}{2} \right]_0^\pi = h \\ b_n]_{n \neq 1} &= \frac{h}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)X}{n-1} - \frac{\sin(n+1)X}{n+1} \right]_0^\pi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.38)$$

のように求まり、結果、この場合の Fourier 係数は、 $b_1 = h$ 以外は、全てゼロとなるのが分かり、(3.33)式を見ても、暗算できるであろう。このとき、振動の変位 $y(x, t)$ は、(3.35)式より、

$$\begin{aligned} y(x, t) &= h \sin(\beta_1 x) \cdot \cos(k\beta_1 t) \\ &= h \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) \dots\dots\dots(3.39) \end{aligned}$$

となり、この第1例の場合、連続体にも拘わらず、振動モードは β_1 の1個のみ、存在することになる。

case ii)

第2例の $\eta(x)$ は、Fig. 3.3 に示すように、弦の中央 ($x = \frac{\ell}{2}$) を、指でピンと摘んで、山型になった現実的な状態として、

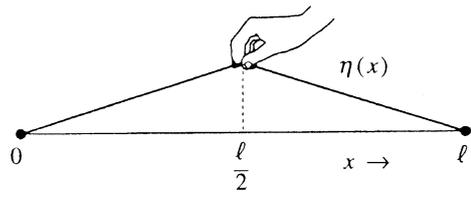


Fig. 3.3

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{2h}{\ell}x & \text{(for } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \text{)} \\ \frac{2h}{\ell}(\ell-x) & \text{(for } \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \text{)} \end{cases} \dots\dots(3.40)$$

の場合について考えよう。このときの Fourier 係数 b_n は、積分区間を $x = \frac{\ell}{2}$ を境に分けて、

$$b_n = \frac{4h}{\ell^2} \int_0^{\frac{\ell}{2}} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx + \frac{4h}{\ell^2} \int_{\frac{\ell}{2}}^\ell (\ell-x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \dots\dots\dots(3.41)$$

によって、計算すればよい。ここに、まず、(3.37)式と同様、 $X = \frac{\pi}{\ell}x$ と置いて、積分変数を X に変換し、更に、第2項において、 $X' = \pi - X$ と置いて、変形すれば、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4h}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin nX dX + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-X) \sin nX dX \right\} \\ &= \frac{4h}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin nX dX - (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} X' \sin nX' dX' \right\} \dots\dots\dots(3.42) \end{aligned}$$

のように、積分区間も第1項と揃って、 $0 \leq X' \leq \frac{\pi}{2}$ となる。従って、 $n (= 1, 2, 3, \dots)$ が、偶数と奇数の場合に、分けて考えればよい。まず、偶数 $n = 2(m+1)$ (但し、 $m = 0, 1, 2, \dots$) の場合は、 $(-1)^n = (-1)^{2(m+1)} = 1$ より、

$$b_{2m} = \frac{4h}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin 2(m+1)X dX - \int_0^{\frac{\pi}{2}} X' \sin 2(m+1)X' dX' \right\} = 0 \dots\dots\dots(3.43)$$

のように、第1項と第2項で相殺してゼロとなる。一方、奇数 $n = 2m+1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) の場合は、 $(-1)^n = (-1)^{2m+1} = -1$ より、第1項と第2項が重なって、

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{8h}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin(2m+1)X dX = \frac{8h}{\pi^2} \left[\frac{\sin(2m+1)X}{(2m+1)^2} - \frac{X \cos(2m+1)X}{2m+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}}{(2m+1)^2} - \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}}{2m+1} \right\} = \frac{8h}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \dots\dots\dots(3.44) \end{aligned}$$

のように求まる。以上の結果から、具体的に、 b_n を幾つか書いてみると、

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{8h}{\pi^2}, & b_2 &= 0, & b_3 &= -\frac{8h}{9\pi^2}, & b_4 &= 0, \\ b_5 &= \frac{8h}{25\pi^2}, & b_6 &= 0, & b_7 &= -\frac{8h}{49\pi^2}, & b_8 &= 0, & \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.45)$$

のようになる。従って、(3.40)式の $\eta(x)$ は、

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi}{\ell} x \right\} \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi}{\ell} x - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{\ell} x + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{\ell} x - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi}{\ell} x + \dots \right) \\ &\equiv \eta_1 - \eta_3 + \eta_5 - \eta_7 + \dots \dots \dots (3.46) \end{aligned}$$

のように Fourier 展開され、Fig. 3.4 に示すように、項数を増やすに連れて、 $\eta(x)$ に近づく様子が分かる。実際の振動変位 $y(x,t)$ は、(3.35)式より、

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \cdot \sin(\beta_{2m+1} x) \cdot \cos(k\beta_{2m+1} t) \right\} \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi}{\ell} x \cdot \cos \frac{k\pi}{\ell} t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{\ell} x \cdot \cos \frac{3k\pi}{\ell} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{\ell} x \cdot \cos \frac{5k\pi}{\ell} t - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi}{\ell} x \cdot \cos \frac{7k\pi}{\ell} t + \dots \right) \dots (3.47) \end{aligned}$$

のようになり、奇数番目の振動モード $\beta_{2m+1} \left(= \frac{(2m+1)\pi}{\ell} \right)$ を、無限に重ね合わせた形として求まるが、Fig. 3.4 から分かるように、明らかに低次 (m が小さい) の振動モードの方が、支配的なのである。

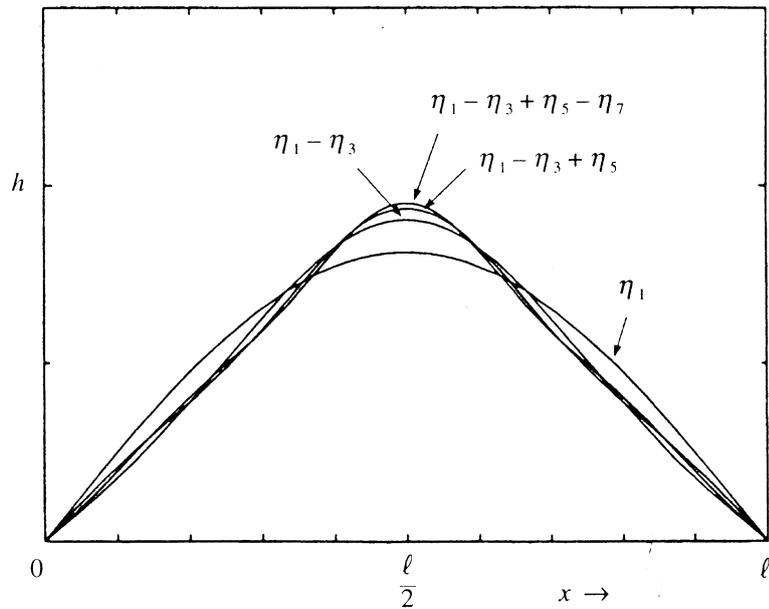


Fig. 3.4