第２章　２重振り子の振動（自由度２の連成振動）

この章では，自由度が２の場合の振動について調べる．　自由度が増えると，系は一見複雑な動きを示すことがある．　しかし，これは２つの基準ﾓｰﾄﾞ（振動ﾓｰﾄﾞ）という単振動の重ね合わせとして，理解できることを示す．　ここでは，２重振り子を例にとって，その連成振動を解析する．

§2.1　２重振り子の連成振動方程式

まず，*Fig.* 2.1 に示すような，２重振り子の連成振動を解析する．　ここでは，*Fig.* 1.1 と同様の単振り子が，２つ連なった場合を取り扱うこととし，簡単のために，上下の振り子の糸の長さ ℓ，錘の重量 w は，同一とする．　ここに，それぞれの振れ角を θ, φ，糸の張力を T_θ, T_φ して，運動方程式を立てることにする．　まず，接線方向（周方向 θ, φ）の運動方程式は，上下それぞれに対して，

$$\left.\begin{array}{ll}[\text{上の振り子}] & \dfrac{w}{g}\dfrac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} = -w\sin\theta + T_\varphi\sin(\varphi-\theta) \\ [\text{下の振り子}] & \dfrac{w}{g}\dfrac{d^2(\ell\theta+\ell\varphi)}{dt^2} = -w\sin\varphi\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

となる．　それぞれの法線方向（張力 T_θ, T_φ の方向）については，糸の伸び縮みと，振り子の円運動に伴う遠心力を無視すれば，

$$\left.\begin{array}{ll}[\text{上の振り子}] & T_\theta = T_\varphi\cos(\varphi-\theta) + w\cos\theta \\ [\text{下の振り子}] & T_\varphi = w\cos\varphi\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2.2)$$

のような，平衡方程式が成立する．　この式から求まる張力 T_φ を，(2.1)式の第１式に代入することにより，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta + \dfrac{g}{\ell}\cos\varphi\cdot\sin(\varphi-\theta) \\ \dfrac{d^2(\theta+\varphi)}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\varphi\end{array}\right\} \quad \cdots\cdot(2.3)$$

のように，書き換えることができる．ここでも，振り子の振れ角 θ, φ は，共にある程度小さい場合（$|\theta| \ll 1, |\varphi| \ll 1, |\varphi-\theta| \ll 1$）を想定し，式中に現われる sin, cos の項に対して，(1.5)式と同様，

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta \approx \theta,\ \sin\varphi \approx \varphi,\ \sin(\varphi-\theta) \approx \varphi-\theta \\ \cos\theta \approx 1,\ \cos\varphi \approx 1,\ \cos(\varphi-\theta) \approx 1\end{array}\right\} \quad \cdots(2.4)$$

のような近似を行なえば，(2.3),(2.2)両式は，それぞれ線型化されて，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \approx -2\dfrac{g}{\ell}\theta + \dfrac{g}{\ell}\varphi \\ \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \approx -\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \dfrac{g}{\ell}\varphi\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2.5)$$

$$\left.\begin{array}{l}T_\theta \approx T_\varphi + w \approx 2w \\ T_\varphi \approx w\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2.6)$$

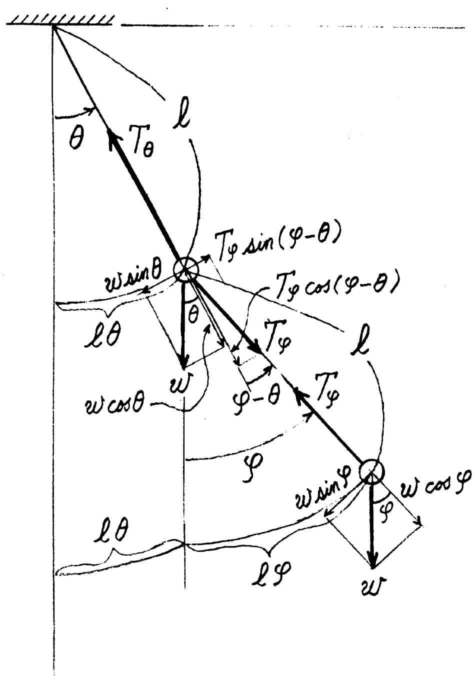

Fig. 2.1

を得る．　さて，ここに，(2.5)式の第２式の右辺の $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ に対して，第１式を用いて整理し，(1.7)式と同様，$\dfrac{g}{\ell} = k^2$ と置けば，この２重振り子の連成振動方程式は，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k^2\theta - k^2\varphi = 0 \\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2k^2\varphi - 2k^2\theta = 0 \end{aligned} \quad \left(但し,\ k = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) \right\} \quad \cdots\cdots (2.7)$$

のように，書くことができる．

§2.2　2重振り子の振動方程式の一般解

ここでは，(2.7)式で与えられる2階の連立微分方程式を解くことを考える．
(1.14)式の単振動の解の形を参考にし，θ, φ が同じ振動数 ω と位相で振動するとして，

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= R_\theta \cos(\omega t - \delta) \\ \varphi(t) &= R_\varphi \cos(\omega t - \delta) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.8)$$

のような解を仮定する．　ここに，振幅の R_θ, R_φ ，共通の位相遅れ角の δ は，任意定数である．
これを，(2.7)式に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned} &\left(-\omega^2 R_\theta + 2k^2 R_\theta - k^2 R_\varphi\right)\cos(\omega t - \delta) = 0 \\ &\left(-\omega^2 R_\varphi + 2k^2 R_\varphi - 2k^2 R_\theta\right)\cos(\omega t - \delta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.9)$$

となり，これを恒等的に満たすためには，それぞれの振動因子 $\cos(\omega t - \delta)$ の係数に相当する括弧内がゼロとなる必要があるから，

$$\left.\begin{aligned} &(\omega^2 - 2k^2)R_\theta + k^2 R_\varphi = 0 \\ &2k^2 R_\theta + (\omega^2 - 2k^2)R_\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.10)$$

のような，連立の代数方程式を得る．　第1式から，R_φ と R_θ の間に，

$$R_\varphi = -\frac{\omega^2 - 2k^2}{k^2} R_\theta \quad \cdots\cdots (2.11)$$

のような関係を得，これを第2式に代入して，R_θ に関して整理すれば，

$$\left\{ (\omega^2 - 2k^2)^2 - 2k^4 \right\} R_\theta = 0 \quad \cdots\cdots (2.12)$$

を得る．　この式は，$R_\theta = 0$ とすれば満たすが，これは振動をしないという意味のない解 (*trival solution*) なので，実際は，中括弧＝ゼロ の条件から，

$$\omega^2 - 2k^2 = \mp\sqrt{2}\,k^2 \quad \cdots\cdots (2.13)$$

のような関係を得る．　これから，この場合の振動数 ω は，

$$\omega = \pm\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}\,k \quad \cdots\cdots (2.14)$$

のように，4個求まるが，取り敢えず，等号の後の複号± の＋ 側の2個を取って，

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,k \approx 0.765\,k \equiv \omega_1 \\ \omega &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,k \approx 1.848\,k \equiv \omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.15)$$

とし，それぞれを ω_1, ω_2 （但し，$\omega_1 < \omega_2$ ）と表記する．（残りの－ 側の2個を捨てた理由については，後述する．）　このことから，(2.7)式の連成振動方程式を満たす振動数 ω は，2個あることが分かる．　このとき，(2.13)式の関係を(2.11)式に代入することにより，上下の振り子の振れ角 θ と φ の振幅には，

$$R_\varphi = \pm\sqrt{2}\,R_\theta \quad \cdots\cdots (2.16)$$

の関係があることが分かった．　ここに，(2.13)式の複号∓ の，－ 側が低周波数の ω_1 （添字1）に，＋ 側が高周波数の ω_2 （添字2）に対応しているから，それぞれ振動ﾓｰﾄﾞ (1, 2) に対して，

$$\left.\begin{aligned} R_{\varphi 1} &= \sqrt{2}\,R_{\theta 1} \\ R_{\varphi 2} &= -\sqrt{2}\,R_{\theta 2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.17)$$

となる．　したがって，振動ﾓｰﾄﾞ1（低周波数 ω_1 ）に対して，θ_1, φ_1 は共に位相遅れ角を δ_1 と

しすれば,

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta_1) \\ \varphi_1 &= R_{\varphi 1}\cos(\omega_1 t-\delta_1) = \sqrt{2}\,R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta_1) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.18)$$

となり, θ_1 と φ_1 は同位相で, φ_1 の振幅は θ_1 の $\sqrt{2}$ 倍であることが分かる. 一方, 振動ﾓｰﾄﾞ 2 (高周波数 ω_2) に対して, θ_2, φ_2 は, 位相遅れ角を δ_2 として,

$$\left.\begin{aligned} \theta_2 &= R_{\theta 2}\cos(\omega_2 t-\delta_2) \\ \varphi_2 &= R_{\varphi 2}\cos(\omega_2 t-\delta_2) = -\sqrt{2}\,R_{\theta 2}\cos(\omega_1 t-\delta_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.19)$$

となり, 同じく φ_2 の振幅は θ_2 の $\sqrt{2}$ 倍であるが, 両者の振れが逆位相で生じることが分かる.

以上より, θ_1, θ_2 と, φ_1, φ_2 が, (2.7)式の微分方程式の特解であることから, これを満たす $\theta(t), \varphi(t)$ それぞれの一般解は, 両者の線型結合により,

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_1 + \theta_2 = R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta_1) + R_{\theta 2}\cos(\omega_2 t-\delta_2) \\ \varphi(t) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \sqrt{2}\,R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta_1) - \sqrt{2}\,R_{\theta 2}\cos(\omega_1 t-\delta_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.20)$$

となる. ここに, θ の振幅 $R_{\theta 1}, R_{\theta 2}$ と, 共通の位相遅れ角 δ_1, δ_2 の 4 個は, 初期条件から定まる未定定数である.

最後に, 議論を先送りしてきた, 振動数 ω として, (2.14)式の複号 ± の − 側の 2 個を捨てたことについて, 検討する. 複号の − 側を取ることは, (2.15)式で定義した ω_1, ω_2 の代わりに, ω として,

$$\left.\begin{aligned} \omega &= -\sqrt{2-\sqrt{2}}\;k \;= -\omega_1 \\ \omega &= -\sqrt{2+\sqrt{2}}\;k \;= -\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.21)$$

の 2 個を採用することに相当する. したがって, (2.20)式において,

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= -\omega_1 \;,\quad \omega_2 = -\omega_2 \\ \delta_1 &= -\delta'_1 \;,\quad \delta_2 = -\delta'_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.22)$$

のような置き換えをして, 整理すれば, $\theta(t), \varphi(t)$ は, それぞれ

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta'_1) + R_{\theta 2}\cos(\omega_2 t-\delta'_2) \\ \varphi(t) &= = \sqrt{2}\,R_{\theta 1}\cos(\omega_1 t-\delta'_1) - \sqrt{2}\,R_{\theta 2}\cos(\omega_1 t-\delta'_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.23)$$

となり, 式中の δ'_1, δ'_2 は未定定数だから, 改めて δ_1, δ_2 と置き換えることにより, (2.20)式と全く同様の解となることが分かる. これが, (2.14)式の複号 ± の, どちらかを採用すれば良いことになる理由である. つまり, (2.15)式と(2.21)式は, 独立の解ではなかったという訳である.

§2.3 与えられた初期条件下での 2 重振り子の振動

本節では, 前節で求めた 2 重振り子の連成振動の一般解に, 初期条件を課すことにより, 具体的な振動の様子を決定する. 得られた幾つかのﾊﾟﾀｰﾝの振動の様子を検討することにより, このような自由度が 2 の場合の, 振動ﾓｰﾄﾞの概念について, 理解を深める.

ここでは, 以下 *case* i), ii), iii) の 3 つのﾊﾟﾀｰﾝの 初期条件を課すことにするが, 何れの場合も, 初期状態 $t=0$ では, 上下の振り子とも, 止まっている $\left(\dfrac{d\theta}{dt}=0,\ \dfrac{d\varphi}{dt}=0\right)$ 場合について考える.

解析の便利のため, 一般解として, (1.12)式と同様な形を仮定すれば, (2.20)式は, (2.17)式の関係に注意すれば,

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= (A_{\theta 1}\cos\omega_1 t + B_{\theta 1}\sin\omega_1 t) + (A_{\theta 2}\cos\omega_2 t + B_{\theta 2}\sin\omega_2 t) \\ \varphi(t) &= \sqrt{2}\,(A_{\theta 1}\cos\omega_1 t + B_{\theta 1}\sin\omega_1 t) - \sqrt{2}\,(A_{\theta 2}\cos\omega_2 t + B_{\theta 1}\sin\omega_2 t) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.24)$$

のように, 書くことができる. ここに, 上記の初期条件から,

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=0} &= \omega_1 B_{\theta 1} + \omega_2 B_{\theta 2} = 0 \\ \left.\frac{d\varphi}{dt}\right]_{t=0} &= \sqrt{2}\,(\omega_1 B_{\theta 1} - \omega_2 B_{\theta 2}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.25)$$

のような関係を得る.　この連立方程式は, 簡単に解けて,

$$B_{\theta 1} = B_{\theta 2} = 0$$

となるから, sin の項は消失し, この場合の $\theta(t)$, $\varphi(t)$ は,

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= A_{\theta 1}\cos\omega_1 t + A_{\theta 2}\cos\omega_2 t \\ \varphi(t) &= \sqrt{2}\,A_{\theta 1}\cos\omega_1 t - \sqrt{2}\,A_{\theta 2}\cos\omega_2 t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.26)$$

の形で振動することが分かる.

以下, $t=0$ での振れ角 $\theta(0)$, $\varphi(0)$ を設定して, 未定の振幅 $A_{\theta 1}$, $A_{\theta 2}$ を決定することによって, 振動の様子を検討してみよう.

<ins>*case* i)</ins>

第1例として, *Fig.* 2.2 に示すような

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= \Theta_0 \\ \varphi(0) &= \sqrt{2}\,\Theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.27)$$

の条件を, (2.26)式に課してみると, $A_{\theta 1}$, $A_{\theta 2}$ に関する

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= A_{\theta 1} + A_{\theta 2} = \Theta_0 \\ \varphi(0) &= \sqrt{2}\,A_{\theta 1} - \sqrt{2}\,A_{\theta 2} = \sqrt{2}\,\Theta_0 \\ \rightarrow \frac{\varphi(0)}{\sqrt{2}} &= A_{\theta 1} - A_{\theta 2} = \Theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.28)$$

なる代数方程式が得られ, 直ちに,

$$\left.\begin{aligned} A_{\theta 1} &= \Theta_0 \\ A_{\theta 2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.29)$$

のように求まる.　結果, この場合の振れ角 $\theta(t)$, $\varphi(t)$ は,

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_1 = \Theta_0\cos\omega_1 t \\ \varphi(t) &= \varphi_1 = \sqrt{2}\,\Theta_0\cos\omega_1 t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.30)$$

となり, 振動ﾓｰﾄﾞ 1 の ω_1 で, しかも, θ と φ は全くの同位相で, 振動することになる.

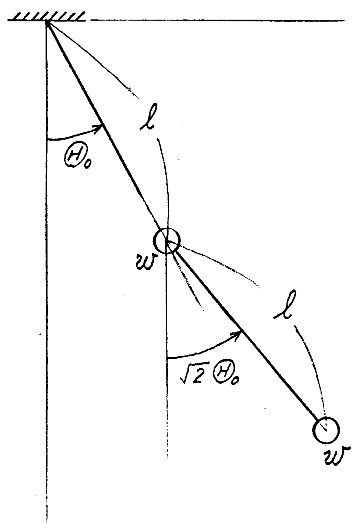

Fig. 2.2

<ins>*case* ii)</ins>

第2例は, $\varphi(0)$ を *case* i) とは逆側に振った, *Fig.* 2.3 に示すような

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= \Theta_0 \\ \varphi(0) &= -\sqrt{2}\,\Theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.31)$$

の条件を課すと, $A_{\theta 1}$, $A_{\theta 2}$ に関する連立方程式は,

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= A_{\theta 1} + A_{\theta 2} = \Theta_0 \\ \varphi(0) &= \sqrt{2}\,A_{\theta 1} - \sqrt{2}\,A_{\theta 2} = -\sqrt{2}\,\Theta_0 \\ \rightarrow \frac{\varphi(0)}{\sqrt{2}} &= A_{\theta 1} - A_{\theta 2} = -\Theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.32)$$

となり, これを解くと,

$$\left.\begin{aligned} A_{\theta 1} &= 0 \\ A_{\theta 2} &= \Theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.33)$$

となる.　この場合の振れ角は,

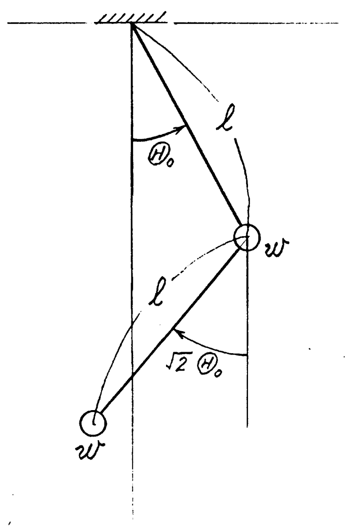

Fig. 2.3

$$\left.\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_2 = \Theta_0 \cos\omega_2 t \\ \varphi(t) &= \varphi_2 = -\sqrt{2}\,\Theta_0 \cos\omega_2 t\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.34)$$

となって，振動ﾓｰﾄﾞ 2 の ω_2 で，しかも，θ と φ は全くの逆位相で，振動することが分かる．

<u>*case* iii)</u>

第３例は，$\varphi(0)$ をｾﾞﾛ からｽﾀｰﾄさせることとし，*Fig.* 2.4 に示すような

$$\left.\begin{aligned}\theta(0) &= \Theta_0 \\ \varphi(0) &= 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.35)$$

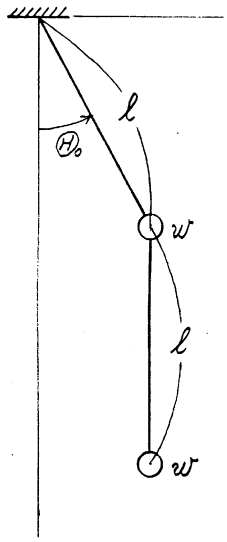

Fig. 2.4

の条件を課す．　このときの $A_{\theta 1}, A_{\theta 2}$ は，

$$\left.\begin{aligned}\theta(0) &= A_{\theta 1} + A_{\theta 2} = \Theta_0 \\ \varphi(0) &= \sqrt{2}\,A_{\theta 1} - \sqrt{2}\,A_{\theta 2} = 0 \\ \rightarrow \frac{\varphi(0)}{\sqrt{2}} &= A_{\theta 1} - A_{\theta 2} = 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.36)$$

の関係から，直ちに，

$$A_{\theta 1} = A_{\theta 2} = \frac{\Theta_0}{2} \quad \cdots\cdots(2.37)$$

のように求まる．　結果，この場合の振れ角 $\theta(t), \varphi(t)$ は，

$$\left.\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_1 + \theta_2 = \frac{\Theta_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ \varphi(t) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_0(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.38)$$

のように求まり，三角関数の和を積に直す公式と(2.15)式の関係を使って，

$$\left.\begin{aligned}\theta(t) &= \Theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\approx \Theta_0 \cos(0.541\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t)\cos(1.307\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t) \\ \varphi(t) &= \sqrt{2}\,\Theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\approx \sqrt{2}\,\Theta_0 \sin(0.541\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t)\sin(1.307\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.39)$$

のように，書くこともできる．

この振動は，*Fig.* 2.5 に示すように，多少複雑な動きをすることになるが，ここでの解析が示すように，上式のような，振動ﾓｰﾄﾞ １と２の単振動の合成から得られるのである．

Fig. 2.6 に，$\theta(t)$ を両ﾓｰﾄﾞに分解した時刻歴を示す．　上が，低周波数成分の θ_1 ，下が高周波数成分の θ_2 で，共に単純な余弦波形となっていることが分かる．

上記の *case* i), ii) の例は，ω_1, ω_2 ２つの振動ﾓｰﾄﾞのうち，

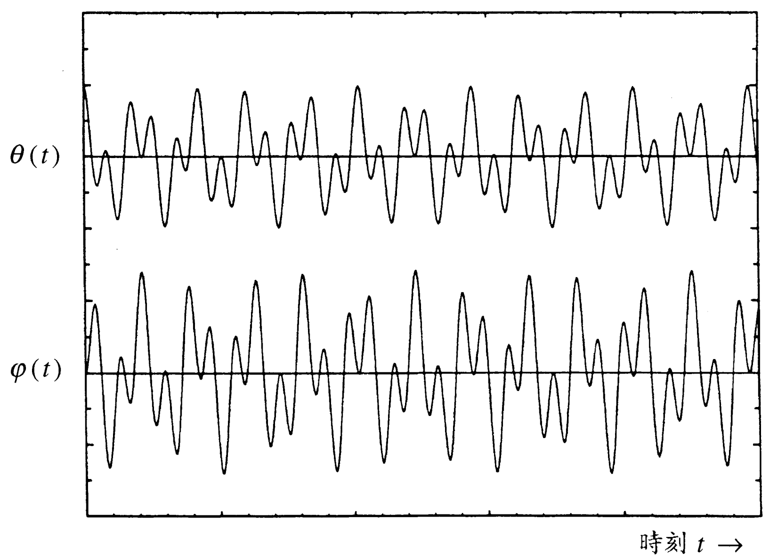

Fig. 2.5

どちらか一方のみで振動するという特殊な場合であって，このような自由度が 2 の場合の振動は，実際には *case* iii) のように，2つの振動モード（*Fig.* 2.6 ）が合成されて，一見複雑な様相（*Fig.* 2.5 ）を呈するのである．

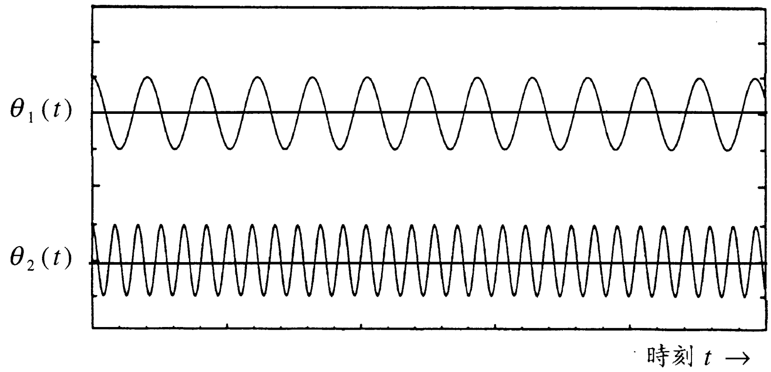

Fig. 2.6