浮体振動論

序

本講義ノートでは，浮体の振動を力学的に理解するために，振動の物理として最も基本的な“自由振動”について，以下の4章で，数学的に懇切に解説する．

第1章では，単振り子の運動方程式と，その解について述べる．　第2章では，連成振動として，2重振り子について学び，複数の振動モードを有する振動の概念を修得する．

第3章では，弦の振動方程式について学び，このような連続体の振動は，無限個の振動モードを有することを示す．　第4章では，船体振動の簡易モデルとして，弾性梁の振動方程式を導き，その振動モードを解析する．

学生諸君は，この講義（自由振動の振動モード）の理解を踏まえて，減衰や強制力を伴なう振動や，変位の大きな非線型振動について，他書で学びを深めてもらいたい．

第1章　単振り子の振動

この章では，自由度が1の場合として，単振り子の振動を取り扱う．　その振動方程式を線型化することにより，全ての振動の基本となる，"**単振動**"の方程式が得られることを示し，その解について述べる．

§1.1　単振り子の振動方程式と線型化

まず，*Fig.*1.1 に示すような，糸の長さ ℓ，錘の重量 w の，単振り子の振動について考える．　ここに，鉛直下向きの軸から測った反時計回りの振れ角を θ，糸の張力を T，重力加速度を g として，錘の運動方程式を立ててみよう．

まず，接線方向（周方向 θ）の運動は，常に鉛直下向きに働く錘の重量の接線方向成分のみによって生ずるから，

$$\frac{w}{g}\frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} = -w\sin\theta \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

となる．　法線方向（張力 T の方向）については，糸の伸び縮みの運動をしないものとすれば，

$$T = w\cos\theta + \frac{w}{g}\frac{\left(\dfrac{d(\ell\theta)}{dt}\right)^2}{\ell} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

のような，平衡方程式が成立する．ここに，右辺第2項は，半径 ℓ の円運動に伴う遠心力を表わすが，通常の振り子の運動の場合には，他の項に比して，充分に小さく，無視できる．　したがって，単振り子の場合の張力は，錘の重量の法線方向成分のみによって，

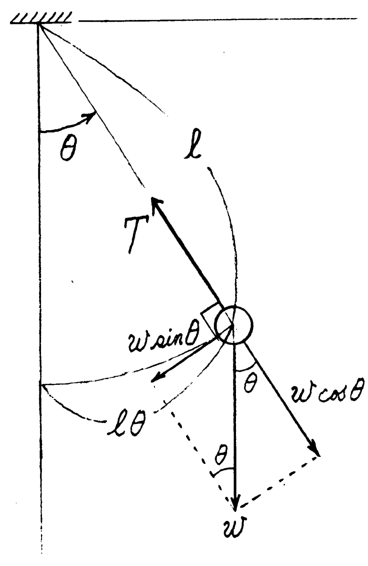

Fig. 1.1

$$T = w\cos\theta \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

のように，決定される．　なお，ここに，式中に現われる $\sin\theta, \cos\theta$ は，それぞれ，$\theta = 0$ 回りに，

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots\cdots \\ \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

のように，*Taylor*展開されるが，振り子の振れ角 θ が，ある程度小さい場合（$|\theta| \ll 1$）は，

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.5)$$

のように，第 1 項のみで計算しても，充分な精度で，$\sin\theta, \cos\theta$ を近似できるから，(1.1),(1.3)両式は，それぞれ線型化されて，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\dfrac{g}{\ell}\theta \\ T \approx w\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.6)$$

のような簡単な形になる． なお，振れ角 θ がある程度大きくなって，(1.5)式の近似が許されない場合，運動方程式は非線型となるから，その場合の摂動的な解法については，この講義ノートの後半で，解説する．

さて，ここに，(1.6)式の第 1 式において，$\dfrac{g}{\ell} = k^2$ と置けば，この方程式は，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0 \\ \qquad \text{但し，} k \equiv \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.7)$$

のように，書くことができる． この形の 2 階線型微分方程式で与えられる振動を，一般に，**単振動**，あるいは，**調和振動**という．

§1.2 単振動の方程式の一般解

ここでは，(1.7) 式の微分方程式を解くことを考える． 振動の問題を解くに当たっては，最も基本となる方程式なので，できるだけ平易な方法で，丁寧に説明する．（多少なりとも，微分方程式の知識のある学生は，素解として複素数 $e^{i\omega t}$ を導入すれば，もっとｴﾚｶﾞﾝﾄに，しかもｼﾝﾌﾟﾙに解けることが，想起されるだろう．）

まず，$\theta_1 = A\cos\omega t$ のような円振動数 ω，振幅 A の解を仮定して，(1.7)式に代入してみると，

$$\left(-\omega^2 + k^2\right) A\cos\omega t = 0 \cdots\cdots (1.8)$$

となり，この代数方程式を恒等的に満たすためには，$\omega^2 = k^2$，即ち，仮定した円振動数 ω は，$\omega = \pm k$ となる必要がある．よって，

$$\theta_1 = A\cos(\pm kt) = A\cos kt \cdots\cdots (1.9)$$

が，(1.7) 式の 1 つの特解であることが分かった． 同様に，$\theta_2 = B'\sin\omega t$ なる解を，(1.7) 式に代入してみると，

$$\left(-\omega^2 + k^2\right) B'\sin\omega t = 0 \cdots\cdots (1.10)$$

なる方程式を得，これからも，円振動数は $\omega = \pm k$ となる． よって，

$$\left.\begin{array}{l}\theta_2 = B'\sin(\pm kt) = \pm B'\sin kt = B\sin kt \\ \qquad \text{但し，} B = \pm B' \text{（任意定数）}\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.11)$$

が，もう 1 つの特解となることが分かる． 従って，θ_1, θ_2 両者を重ね合わせた，

$$\theta(t) = \theta_1 + \theta_2 = A\cos kt + B\sin kt \cdots\cdots (1.12)$$

が，単振動の方程式(1.7)の一般解となる．但し，A, B は，振幅を表わす任意定数であり，これらの値は，初期条件から決定されることになる． 実際，この $\theta(t)$ を，(1.7)式の左辺に代入してみれば，明らかにｾﾞﾛとなり，この振動方程式を満たすことが，直ぐに確かめられるはずである．

一方，この $\theta(t)$ は，A, B を，それぞれ，$A = R\cos\delta$，$B = R\sin\delta$ と置くことにより，

$$\left.\begin{array}{l}\theta(t) = R\cos(kt - \delta) \\ \quad \text{但し，} R = \sqrt{A^2 + B^2}\text{，} \delta = \tan^{-1}\dfrac{B}{A} \text{　（} R, \delta \text{：任意定数）}\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.14)$$

のような，任意の余弦振動の形に整理することもできる．ここに，R は振幅，δ は位相遅れ角を表わす． なお，このときの周期 τ と，振動数 ν は，円振動数 k との間に，

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{2\pi}{k} \\ \nu &= \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.15)$$

のような関係にある．　周期 τ の逆数が，振動数 ν で，１秒間に何回振動するかということを示す．振動数 ν の単位は，ﾍﾙﾂ (Hz) であり，家庭用電気の 50 Hz, 60 Hz というときは，この振動数を意味する．　この振動数 ν と円振動数 k は，因子 2π だけ異なる．　ν は，振動の状態を直感的に理解する際には便利だが，これを使うと，解析の際の式が多少煩雑になるので，以下では，k だけを使うようにする．　また，k の呼び名も，いちいち円振動数（あるいは，角振動数）と呼ばずに，単に振動数と呼ぶことにする．

上述の (1.12),(1.14) の両表現は共に，２つの任意定数を含んでおり，等価なものであるから，解析の必要に応じて，都合の良い方を採択して用いればよいであろう．　以上のことから，(1.7)式の第２式が表わす $k = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ が，単振り子（振れ角 θ が，ある程度小さい $|\theta| \ll 1$ の場合）の固有振動数を与えることになり，これは，振幅の大小に依らず，同一の値となって，周期が等しくなることから，等時性の性質を有していることが分かる．

§1.3　与えられた初期条件下での単振り子の振動

ここでは，単振り子の振動に，初期条件を課すことにより，一般解の中に現われる２つの未定定数を定め，具体的な振動の様子を調べてみる．

初期状態 $t = 0$ として，振れ角 $\theta = \Theta_0$ で，止まっている $\left(\dfrac{d\theta}{dt} = 0\right)$ 場合について考えよう．　一般解として，(1.12)式を採用することにすれば，後者の条件は，

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=0} = \Big[-kA\sin kt + kB\cos kt\Big]_{t=0} = kB = 0 \quad \cdots\cdots(1.16)$$

のように書くことができるから，$B = 0$ となり，$\theta(t) = A\cos kt$ の形であることが分かる．　次に，前者の条件より，未定の振幅 A を定めれば，

$$\theta\Big]_{t=0} = A\cos kt\Big]_{t=0} = A = \Theta_0 \quad \cdots\cdots(1.17)$$

となるから，$A = \Theta_0$ であることが分かり，結果として，この場合の振れ角は，

$$\theta(t) = \Theta_0 \cos kt \quad \cdots\cdots(1.18)$$

となることが分かった．