学術刊行物　ISSN 0919-9985

日本航海学会誌

NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
― その５：没水円柱に対する証明 ―

堀　　勉

A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
― *Part 5 : The Proof for Submerged Circular Cylinder* ―

Tsutomu HORI

令和２年
10月
第214号

研究・調査

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
— その 5 ：没水円柱に対する証明 —

堀　　勉

A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
— Part 5 : The Proof for Submerged Circular Cylinder —

Tsutomu HORI

キーワード：　*浮心，圧力中心，没水円柱，静水圧，圧力積分*

1. 前 書 き

船に作用する浮力の中心「浮心」は，水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち，水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは，造船学上，否，物理学上の周知の事実である．

Archimedes の原理[1] が教える浮力は，静水圧の圧力積分によって明快に求められるが，浮心位置については，物理学や水理学，造船学や航海力学など，どの教科書（例えば，第 1 報[2]の参考文献(2)～(16)）にも，水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると記述されていて，静水圧による圧力中心としての説明は見当たらない．

そんな状況の中, 10 年ほど前, 小松[3] によって,「浮心≠圧力中心？」の問題提起が成され，日本船舶海洋工学会の推進性能･運動性能合同研究会等で，瀬戸[4],[5]，鈴木(勝) [6]，芳村･安川[7]，小松[8]，薮下[9], 慎[10]らによって, 活発に議論が成された．

この問題に対して，著者は，この航海学会誌上で，第 1 報[2]と第 2 報[11]において，鉛直方向の圧力中心を定められない原因は，直立状態では，水平方向の力が平衡してゼロになる為であると考え，その打開策として，船をθだけ横傾斜させた状態で，静水圧を圧力積分し，船に固定して傾斜した座標系に関して，作用する力とモーメントを計算した．その場合，合力の両成分ともゼロにならないことから，傾斜時の圧力中心を決定し得ることを示した．その結果を，$\theta \to 0$とすることで，圧力中心が, 直立状態での水面下の図心, 即ち, 周知の浮心に位置することを，矩形断面[2]に続いて，任意の横断面形状[11]について証明した[12].

この問題については，一色[13]や 薮下[14]は，重力の作用方向を，鉛直方向から傾斜させることにより,「浮心＝圧力中心」であることを示した．その後，薮下ら[15]は，浮体や重力の作用方向を傾斜させるのではなく，座標系のみを傾斜させることで，同様の結論が得られることを示した．一方，鈴木(勝) [16]，小松[17],[18]，一色[19]，薮下ら[20] が，種々のアプローチで，この問題に対して検討を加え，議論も深まってきた．

このような状況に鑑み，著者は，第 3 報[21]として，傾斜しても水面下の形状が変化しない半没円柱について，第 4 報[22]では 三角柱について，「浮心＝圧力中心」であることを証明し，浮体については 完結した．

この第 5 報では，没水円柱について,「浮心＝静水圧の圧力中心」であることを証明する．半没円柱[21]の場合と同じく，傾斜しても断面形状が変化しないので，同様な手法により，没水体についても証明できたので，ここに ご報告させて頂く次第である．

2．没水円柱の圧力中心 C_P の位置決め

図１は，半径 R の円柱が，頂部までの深度 f の位置に没水した状態で，右舷側に θ だけ横傾斜した横断面を示す．

円柱の中心（深度 $f+R$）に原点 o を置き，z 軸を鉛直下向きに取った空間固定座標系を $o-yz$，円柱に固定して時計回りに θ だけ回転した座標系を $o-\eta\zeta$ とする．

以下，後者の $o-\eta\zeta$ 座標系について，ζ 軸から反時計方向に測った偏角 ϕ を変数として，解析を進める．

円柱表面 $(\eta,\zeta)=(R\sin\phi, R\cos\phi)$ での水深 $Z(\phi)$ は，

$$Z(\phi)=f+R+z(\phi) \quad \cdots\cdots(1)$$

である．ここに，右辺の $z(\phi)$ は，原点 o からの水深であり，η,ζ 座標で書くと，

$$\begin{aligned} z(\phi) &= (\zeta+\eta\tan\theta)\cos\theta \\ &= (R\cos\phi+R\sin\phi\cdot\tan\theta)\cos\theta \\ &= R(\cos\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta) \\ &= R\cos(\phi-\theta) \quad \cdots\cdots(2) \end{aligned}$$

となり，図からも容易に導かれる結果で，負値も

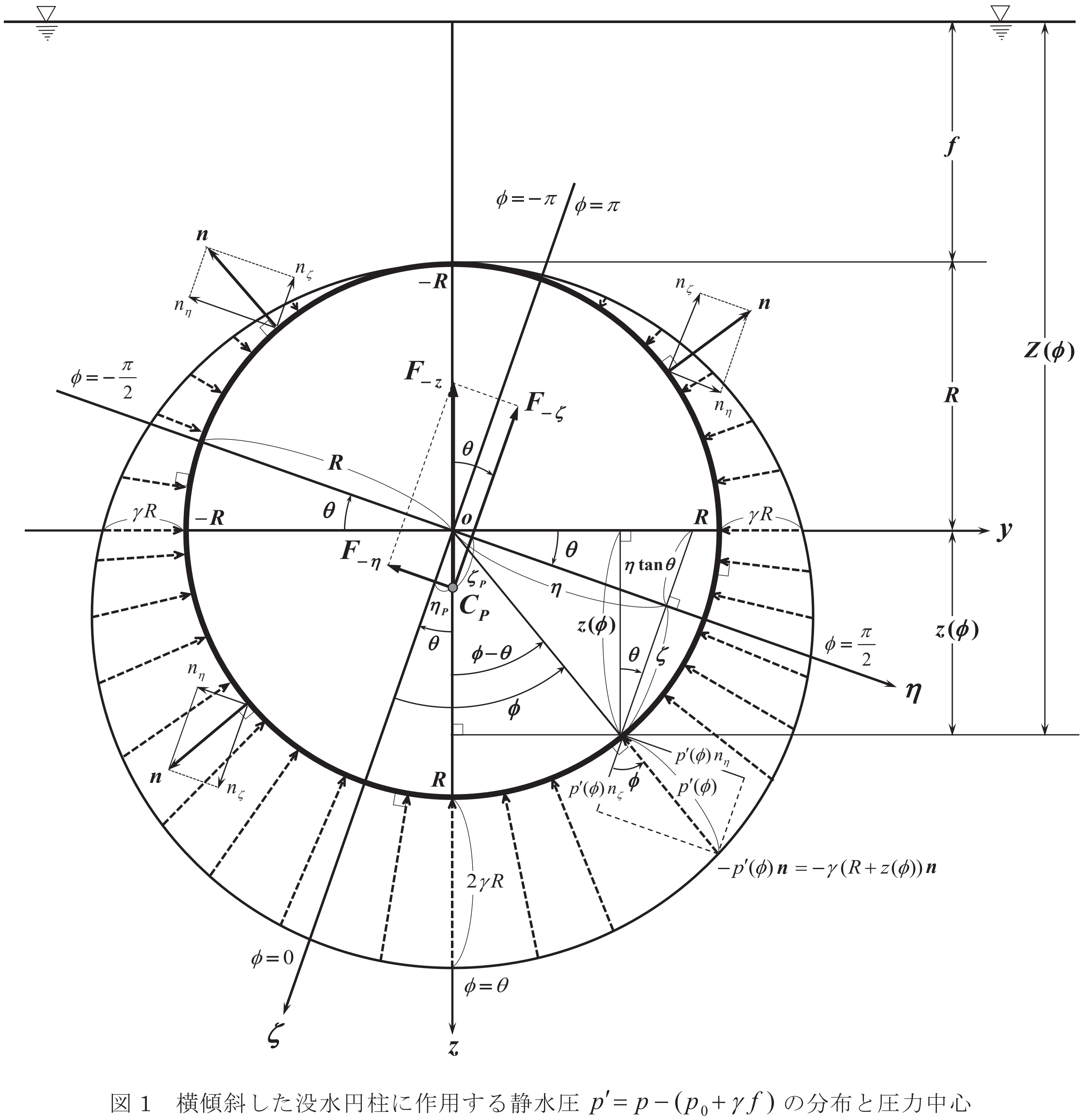

図１　横傾斜した没水円柱に作用する静水圧 $p'=p-(p_0+\gamma f)$ の分布と圧力中心

取り得る．

円柱表面での静水圧 $p(\phi)$ は，大気圧を p_0，水の比重量を γ とし，水深 $Z(\phi)$ に(1)式を用いると，

$$\begin{aligned} p(\phi) &= p_0 + \gamma Z(\phi) \\ &= p_0 + \gamma f + \gamma (R + z(\phi)) \\ &= p_0 + \gamma f + p'(\phi) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

のように書ける． ここに，右辺の $p'(\phi)$ は，

$$\begin{aligned} p'(\phi) &\equiv p(\phi) - (p_0 + \gamma f) \\ &= \gamma (R + z(\phi)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{aligned}$$

で定義した，円柱頂部での静水圧 $p_0 + \gamma f$ に対する相対圧である． 図 1 に破線で示す圧力は，この $p'(\phi)$ であり，円柱表面に対して垂直な $-\boldsymbol{n}$ 方向に作用し，円柱頂部では 圧力ゼロである．

このとき，円柱表面に立てた，外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，偏角 ϕ を使って，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= n_\eta \boldsymbol{j} + n_\zeta \boldsymbol{k} \\ &= \sin\phi\, \boldsymbol{j} + \cos\phi\, \boldsymbol{k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{aligned}$$

のように書ける． ここに， n_η, n_ζ は，それぞれ，円柱固定座標 η, ζ に対する方向余弦を意味する．

2. 1 没水円柱に働く静水圧による力の η 成分 $F_{-\eta}$ と ζ 成分 $F_{-\zeta}$

円柱表面に作用する圧力 $p(\phi)$ は，前節の(2),(3),(4) 式により，

$$\begin{aligned} p(\phi) &= p_0 + \gamma f + p'(\phi) \\ &= p_0 + \gamma (f + R) + \gamma z(\phi) \\ &= p_C + \gamma R \cos(\phi - \theta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

のように表記できる． 式中の p_C は，

$$p_C \equiv p_0 + \gamma (f + R) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

で定義したもので，円の中心 o を通る y 軸上（水深 $f + R$ ）での静水圧を意味する．

円柱表面に働く，静水圧による力の $-\eta$ 方向成分 $F_{-\eta}$ と $-\zeta$ 方向成分 $F_{-\zeta}$ は，(6)式に示す $p(\phi)$ の η, ζ それぞれの成分（図 1 に記す）を，

$$\left.\begin{aligned} F_{-\eta} &= \oint_{r=R} p(\phi) n_\eta \, d\ell \\ F_{-\zeta} &= \oint_{r=R} p(\phi) n_\zeta \, d\ell \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

のように，円周に亙って圧力積分することにより求まる． ここに，円柱表面（ $r = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = R$ ）では，線素は $d\ell = R\, d\phi$， η 方向と ζ 方向の方向余弦は，(5)式により $n_\eta = \sin\phi$, $n_\zeta = \cos\phi$ と書けるから，偏角 ϕ に関する積分で表記できる．

実際， $-\eta$ 方向に働く力 $F_{-\eta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\eta} &= \int_{-\pi}^{\pi} (p_C + \gamma R \cos(\phi - \theta)) \sin\phi \cdot R\, d\phi \\ &= p_C R \int_{-\pi}^{\pi} \sin\phi\, d\phi + \gamma R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\phi - \theta) \sin\phi\, d\phi \\ &= p_C R \int_{-\pi}^{\pi} \sin\phi\, d\phi + \frac{1}{2} \gamma R^2 \cos\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\phi\, d\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma R^2 \sin\theta \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\phi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\phi\, d\phi \right) \qquad \cdots(9) \end{aligned}$$

のように， $-\zeta$ 方向に働く $F_{-\zeta}$ は，

$$\begin{aligned} F_{-\zeta} &= \int_{-\pi}^{\pi} (p_C + \gamma R \cos(\phi - \theta)) \cos\phi \cdot R\, d\phi \\ &= p_C R \int_{-\pi}^{\pi} \cos\phi\, d\phi + \gamma R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\phi - \theta) \cos\phi\, d\phi \\ &= p_C R \int_{-\pi}^{\pi} \cos\phi\, d\phi + \frac{1}{2} \gamma R^2 \sin\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\phi\, d\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma R^2 \cos\theta \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\phi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\phi\, d\phi \right) \cdot\cdot(10) \end{aligned}$$

のように，展開して項別積分することにより，(9), (10) 式ともに，第 1 項，第 2 項，第 4 項の積分値はゼロとなって，第 3 項のみから積分値 2π が生じ，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} F_{-\eta} &= \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \sin\theta \\ F_{-\zeta} &= \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

のように求まる． この結果， $F_{-\eta}, F_{-\zeta}$ ともに，第 1 項の p_C に関する積分はゼロとなることから，没水体に働く力は，大気圧 p_0 や 没水深度 f に依らないことが分かる．

また，次節(12)式の結果により， $F_{-\eta}, F_{-\zeta}$ は，それぞれ，鉛直方向に働く浮力 F_{-z} の η 成分と ζ 成分として得られている．

2. 2 y 方向と z 方向の合力 F_{-y}, F_{-z}

前節(11)式で求めた $F_{-\eta}, F_{-\zeta}$ を用いて，水平成分（ $-y$ 方向）の F_{-y} と，鉛直成分（ $-z$ 方向）の F_{-z}

を求めると，

$$\left.\begin{aligned} F_{-y} &= F_{-\eta}\cos\theta - F_{-\zeta}\sin\theta \\ &= \gamma\cdot\pi R^2(\sin\theta\cdot\cos\theta-\cos\theta\cdot\sin\theta) \\ &= 0 \\ F_{-z} &= F_{-\zeta}\cos\theta + F_{-\eta}\sin\theta \\ &= \gamma\cdot\pi R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= \gamma\cdot\pi R^2 \end{aligned}\right\}\cdots(12)$$

のように，圧力積分による合力として，水平成分 F_{-y} は生じないことが分かる．

鉛直成分 F_{-z} は，水の比重量 γ と没水円の面積 πR^2 の積となっていて，Archimedes の原理[1]が教える通り，鉛直上向きに生じる浮力そのものである．

2. 3　η, ζ 方向の圧力によるモーメント

円柱表面に働く $-\eta$ 方向の圧力による，原点 o に関する時計回りのモーメント M_η と，$-\zeta$ 方向の圧力による，反時計回りのモーメント M_ζ は，それぞれ，(8)式にモーメントのレバーとして，ζ 或いは η を乗じて積分することにより，

$$\left.\begin{aligned} M_\eta &= \oint_{r=R} p(\phi)\,\zeta\cdot n_\eta\, d\ell \\ M_\zeta &= \oint_{r=R} p(\phi)\,\eta\cdot n_\zeta\, d\ell \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

によって求め得る．　ここに，2.1 節の $F_{-\eta}$, $F_{-\zeta}$ に対する(9),(10)両式と同様に，偏角 ϕ に関する周回積分で表記すれば，M_η は，

$$\begin{aligned} M_\eta &= \int_{-\pi}^{\pi}(p_C+\gamma R\cos(\phi-\theta))R\cos\phi\cdot\sin\phi\cdot R d\phi \\ &= p_C R^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin\phi\cos\phi\, d\phi \\ &\quad +\gamma R^3\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\phi-\theta)\sin\phi\cos\phi\, d\phi \end{aligned}\quad\cdots\cdots(14)$$

によって，M_ζ は，

$$\begin{aligned} M_\zeta &= \int_{-\pi}^{\pi}(p_C+\gamma R\cos(\phi-\theta))R\sin\phi\cdot\cos\phi\cdot R d\phi \\ &= p_C R^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin\phi\cos\phi\, d\phi \\ &\quad +\gamma R^3\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\phi-\theta)\sin\phi\cos\phi\, d\phi \end{aligned}\quad\cdots\cdots(15)$$

によって求まることになり，両モーメントは，同値として得られることになる．展開して，計算を進めると，

$$\begin{aligned} M_\eta &= M_\zeta \\ &= \frac{1}{2}p_C R^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\phi\, d\phi \\ &\quad +\gamma R^3\cos\theta\int_{-\pi}^{\pi}\sin\phi\cos^2\phi\, d\phi \\ &\quad +\gamma R^3\sin\theta\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi\, d\phi \\ &= 2\gamma R^3\sin\theta\int_{0}^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi\, d\phi \end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(16)$$

となり，第 1 項と第 2 項は，被積分関数が ϕ に関して奇関数であるからゼロになって，第 3 項は，偶関数であるから，積分区間を半分に折り返して表記したものである．

更に，$\varphi=\phi-\dfrac{\pi}{2}$ によって，積分変数を ϕ から φ に置換することによって，

$$\begin{aligned} M_\eta &= M_\zeta \\ &= -2\gamma R^3\sin\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

となり，φ に関して奇関数となるから，積分値はゼロとなって，没水円柱の場合，半没円柱[21]と異なり，静水圧の η, ζ 成分によって，モーメントを生じないことが分かる．

2. 4　没水円柱の圧力中心 C_P の位置決め

圧力中心 C_P を，円柱固定の $o-\eta\zeta$ 座標系で位置決めするには，第 1 報[2]，第 2 報[11]，第 3 報[21]，第 4 報[22]と同様に，大串[23]が用いた水理学の手法に基づいて，η 座標 η_P は，$-\zeta$ 方向の圧力による合力 $F_{-\zeta}$ とモーメント M_ζ により，ζ 座標 ζ_P は，$-\eta$ 方向の圧力による $F_{-\eta}$ と M_η により，共に(11), (17)式の結果を用いて，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} \eta_P &= \frac{M_\zeta}{F_{-\zeta}} = \frac{0}{\gamma\cdot\pi R^2\cdot\cos\theta} = 0 \\ \zeta_P &= \frac{M_\eta}{F_{-\eta}} = \frac{0}{\gamma\cdot\pi R^2\cdot\sin\theta} = 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

のように，求まる．　この結果，没水円柱の圧力中心 C_P は，没水円に固定した $o-\eta\zeta$ 座標系で，

$$C_P(\eta_P,\zeta_P) = (0,0)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

のように，没水円の中心である原点 o に位置することが分かり，空間固定の $o-yz$ 座標系でも，座

標変換するまでもなく,

$$C_P(y_P, z_P) = (0, 0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

である.

この (19),(20) 両式は, 正しく, 没水円の図心位置を示していることから, 没水体の場合も, 静水圧の圧力中心が, 周知の浮心位置であることを, 証明できた.

3. 後 書 き

本稿で展開した 没水円の場合も, 第 3 報[21]の半没円柱と同様, 横傾斜させても, その幾何学的形状が変化しないことから, 第 1 報 (矩 形 断 面[2]), 第 2 報 (任意の断 面 形 状[11]), 第 4 報 (三角柱[22]) のように, 横傾斜角を $\theta \to 0$ として, 直立時の圧力中心を求め直すまでもなく, 圧力中心の位置決めをすることができた.

その結果, 没水体の場合も, 静水圧の圧力中心が, 周知の浮心位置に一致することを, 証明し得た訳である.

謝 辞

本稿を閉じるに臨み, 著者が学部 1 年生のとき, 黒板に丁寧な図と式を書いて, 初めて学ぶ造船学の専門科目として, 船舶算法の理論を懇切に教えて下さった, 今は亡き恩師 栗原 真人 先生に, 深甚なる感謝の意を捧げます. 先生のお姿が, 本研究のテーマや 著者の研究姿勢の根幹になっているからです.

参 考 文 献

(1) ARCHIMEDES : The Works of Archimedes, On Floating Bodies, Book I & Book II, Edited and Translated by T. L. HEATH, Cambridge University Press, pp.253～300, 1897.

(2) 堀 勉 : 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — 浮心=圧力中心の証明 —, 日本航海学会誌, 第 203 号, pp.88～92, 2018 年 1 月.

(3) 小松 正彦 : 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察, 舟艇技報, No.93, pp.21～25, 2007 年 12 月.

(4) 瀬戸 秀幸 :「浮心」考 — 小松 : 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察 の再検討 —, 第 14 回 推進性能・運動性能合同研究会, 2010 年.

(5) 瀬戸 秀幸 : 浮力の作用中心に関する一考察, 日本船舶海洋工学会 講演会論文集, 第 12 号, pp.529～532, 2011 年 5 月.

(6) 鈴木 勝雄 : 神説「浮心の法則」, 2011 年 1 月.

(7) 芳村康男, 安川宏紀 : 浮力の作用中心と復原性の再考, 第 16 回 推進性能・運動性能合同研究会, 2011 年.

(8) 小松 正彦 : 座標変換による浮力の作用中心に関する考察, 第 19 回 推進性能・運動性能合同研究会, 2012 年.

(9) 渡辺 倫堂 : 船体周りの圧力分布と浮心の関係に関する研究, 防衛大学校 機械システム工学科 船舶工学講座 卒業論文, (指導) 藪下和樹, 岡畑 豪, pp.1～25, 2013 年 3 月.

(10) 慎 燦益 : 造船幾何学 — 造船設計の基礎知識 —, 第 4 章 排水量等計算と曲線図, 4.2 アルキメデスの原理, 海文堂, pp.125～133, 2013 年 2 月 (初版).

(11) 堀 勉 : 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その 2 : 任意の断面形状の場合 —, 日本航海学会誌, 第 205 号, pp.28～34, 2018 年 7 月.

(12) 堀 勉 :「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開 — その 1 :「浮心=圧力中心」の証明 —, 舟艇技法, 第 135 号, pp.1～10, 2018 年 9 月.

(13) 一色 浩 : Pressure Center, 2018 年 3 月.

(14) 藪下 和樹 : 船舶の復原 及び 推進性能 (2018 年度版), 第 4 章 浮力と圧力分布の関係, 防衛大学校 機械システム工学科 テキスト, pp.81～90, 2018 年 4 月.

(15) 藪下 和樹, 日比 茂幸, 岡畑 豪 : 物体周りの圧力分布による浮心位置の同定, 第 10 回 推進・運動性能研究会, pp.1～14, 2018 年 6 月.

(16) 鈴木 勝雄 : 見かけの浮心について — 堀論文[2] に関連して —, 2018 年 4 月.

(17) 小松　正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察（続報），舟艇技法，第 136 号，pp.12～18，2018 年 12 月.

(18) 小松　正彦：圧力分布に着目した浮体の「浮力の作用中心」，第 13 回　推進・運動性能研究会，pp.1～22，2019 年 6 月.

(19) 一色　浩：浮心について，日本船舶海洋工学会 講演会 論文集，第 28 号，No. 2019S-OS2-9，pp.131～132，2019 年 5 月.

(20) 藪下　和樹，日比　茂幸，岡畑　豪：浮心位置の同定および圧力分布との関係，日本船舶海洋工学会 講演会 論文集，第 30 号，No. 2020S-GS12-16，pp.629～636，2020 年 5 月.

(21) 堀　　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定　— その 3：半没円柱に対する証明 —，日本航海学会誌，第 208 号，pp.60～68，2019 年 4 月.

(22) 堀　　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定　— その 4：三角柱に対する証明 —，日本航海学会誌，第 213 号，pp.50～58，2020 年 7 月.

(23) 大串　雅信：理論 船舶工学（上巻），1.3 浮力の例題，海文堂，pp.4～5，1971 年 6 月（初版）.

令和 2 年 8 月 8 日 投稿

堀（ホリ）　勉（ツトム）
正会員　長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授（〒851-0193 長崎市 網場町 536）
E-mail : HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp，HomePage : http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/
1987 年　大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了，工学博士
所属学会：日本航海学会，日本船舶海洋工学会の各会員；　研究テーマ：水面波動力学

日本航海学会誌　**NAVIGATION**

令和２年10月　第214号　　OCT 2020 No. 214

日 本 航 海 学 会
Japan Institute of Navigation
c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN
定価 2,000 円（税込）