学術刊行物　ISSN 0919-9985

日本航海学会誌
NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
— その４：三角柱に対する証明 —

堀　　勉

A Positioning on Ship’s Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
— Part 4 : The Proof for Triangular Prism —

Tsutomu HORI

令和２年
7月
第213号

研究・調査

静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
— その４：三角柱に対する証明 —

堀　　勉

A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
— Part 4 : The Proof for Triangular Prism —

Tsutomu HORI

キーワード：　*浮心，圧力中心，三角柱，静水圧，圧力積分*

1. 前 書 き

船に作用する浮力の中心「浮心」は，水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち，水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは，造船学上，否，物理学上の周知の事実である．

Archimedes の原理[1]が教える浮力は，静水圧の圧力積分によって明快に求められるが，浮心位置については，物理学や水理学，造船学や航海力学など，どの教科書（例えば，第 1 報[2]の参考文献 (2)～(16)）にも，水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると記述されていて，静水圧による圧力中心としての説明は見当たらない．

そんな状況の中, 10 年ほど前, 小松[3]によって,「浮心≠圧力中心？」の問題提起が成され，日本船舶海洋工学会の推進性能･運動性能合同研究会等で，瀬戸[4],[5]，鈴木(勝)[6]，芳村･安川[7]，小松[8], 薮下[9], 慎[10]らによって, 活発に議論が成された．

この問題に対して，著者は，この航海学会誌上で，第 1 報[2]と第 2 報[11]において，鉛直方向の圧力中心を定められない原因は，直立状態では，水平方向の力が平衡してゼロになる為であると考え，その打開策として，船を θ だけ横傾斜させた状態で，静水圧を圧力積分し，船に固定して傾斜した座標系に関して，作用する力とモーメントを計算した． その場合，合力の両成分ともゼロにならないことから，傾斜時の圧力中心を決定し得ることを示した． その結果を，$\theta \to 0$ とすることで，圧力中心が，直立状態での水面下の図心，即ち，周知の浮心に位置することを，矩形断面[2]に続いて，任意の横断面形状[11]について証明した[12]．

この問題については，一色[13]や 薮下[14]は，重力の作用方向を，鉛直方向から傾斜させることにより,「浮心＝圧力中心」であることを示した． その後，薮下ら[15]は，浮体や重力の作用方向を傾斜させるのではなく，座標系のみを傾斜させることで，同様の結論が得られることを示した． 一方，鈴木(勝)[16]，小松[17],[18]，一色[19]が，種々のアプローチで，この問題に対して検討を加え，議論も深まってきた．

このような状況に鑑み，著者は，第 3 報[20]として，傾斜しても水面下の形状が変化しない半没円柱についても,「浮心＝圧力中心」であることを証明した．

この第 4 報では，三角柱について，同様な手法により,「浮心＝静水圧の圧力中心」であることを証明する． 前報[20]の半没円柱と同様, 任意形状[11]の証明に含まれるものであるが，矩形[2]や半没円柱[20]と共に典型的な断面形状であるので，これを公表することも，強ち無意味ではないと考え，ここにご報告させて頂く次第である．

2. 三角柱の圧力中心 C_P の位置決め

図１は，三角柱（幅 $2b$，吃水 f，乾舷 h，頂角 2ϕ）が，右舷側に θ だけ横傾斜した場合の横断面を示す．ここに，直立時の三角柱の水線の半幅 b は，吃水 f と半頂角 ϕ を用いて，

$$b = f\tan\phi \quad \cdots\cdots(1)$$

と書ける．この三角柱の横断面は，底辺（甲板長）$2(f+h)\tan\phi$，高さ $f+h$，両辺 $(f+h)\sec\phi$ の二等辺三角形である．

2. 1　左右両舷の浸水長などの準備計算

図１の水線付近の露出部（左舷 *Left*）の三角形 $\triangle oE_LT_L$ と没入部（右舷 *Right*）の三角形 $\triangle oE_RT_R$ について，$x_L = \overline{U_LE_L}$，$x_R = \overline{U_RE_R}$ は，それぞれの三角形の高さ $q_L = \overline{U_LT_L}$，$q_R = \overline{U_RT_R}$ に対して，幾何的に，

$$\left.\begin{aligned} q_L &= (b - x_L)\tan\theta = \frac{x_L}{\tan\phi} \\ q_R &= (b + x_R)\tan\theta = \frac{x_R}{\tan\phi} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

の関係にあるから，

$$\left.\begin{aligned} x_L &= (b - x_L)\tan\phi\tan\theta \\ x_R &= (b + x_R)\tan\phi\tan\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

である．x_L, x_R は，半幅 b に対して(1)式の関係を用いて，解くことにより，

$$\left.\begin{aligned} x_L &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f\tan\phi \\ x_R &= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} f\tan\phi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

のように求まる．但し，式中の ε は，半頂角 ϕ と横傾斜角 θ それぞれの正接の積として，

$$\varepsilon \equiv \tan\phi\tan\theta \quad \cdots\cdots(5)$$

で定義したものである．

次に，左右両舷側における，乾舷の増分長 s_L と，減分長 s_R は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} s_L &= \frac{x_L}{\sin\phi} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f\sec\phi \\ s_R &= \frac{x_R}{\sin\phi} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} f\sec\phi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

となる．

よって，左右両舷側の浸水長 ℓ_L, ℓ_R は，

$$\left.\begin{aligned} \ell_L &= f\sec\phi - s_L = \frac{1}{1+\varepsilon} f\sec\phi \\ \ell_R &= f\sec\phi + s_R = \frac{1}{1-\varepsilon} f\sec\phi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

である．

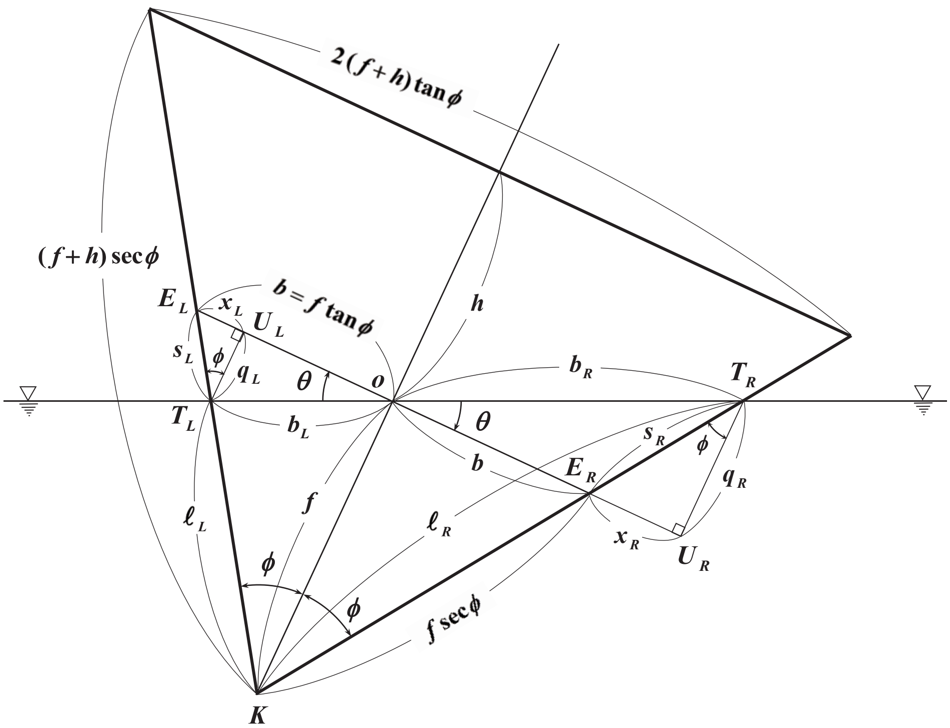

図１　横傾斜した三角柱の横断面

また，左右両舷側の水線幅 b_L, b_R は，(3)式の x_L, x_R を用いて，

$$\left.\begin{aligned} b_L &= (b - x_L)\sec\theta = \frac{1}{1+\varepsilon} f\tan\phi\sec\theta \\ b_R &= (b + x_R)\sec\theta = \frac{1}{1-\varepsilon} f\tan\phi\sec\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots(8)$$

のように求まる．よって，水線幅は，

$$b_L + b_R = \frac{2}{1-\varepsilon^2} f\tan\phi\sec\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

である．

よって，θ だけ横傾斜した三角柱の，水面下の三角形 ΔKT_LT_R の面積 A は，

$$A = \frac{1}{2}(b_L + b_R)\cdot f\cos\theta = \frac{1}{1-\varepsilon^2} f^2\tan\phi \quad \cdots(10)$$

であり，直立状態（$\theta = 0$）の

$$A\Big]_{\theta=0} = f^2\tan\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

より，$\varepsilon^2 A$ だけ，水面下の面積が増加している．

2.2　三角柱表面に働く圧力による力

図１の三角柱の横断面に働く圧力分布と，その積分値である力を，図２に示す．

座標系は，静水面中央に原点 o を置き，z 軸を鉛直下向きに取った空間固定座標系を $o-yz$，三角柱に固定して傾斜した座標系を $o-\eta\zeta$ とする．

大気圧を p_0，水の比重量を γ とし，大気圧を破線，静水圧 γz を実線，それぞれの圧力を細線，力を太線のベクトルで示していて，全て，三角柱表面に対して，垂直方向に作用する．

船底に当たる三角形の頂点 K の水深 Z_f は，

$$Z_f = f\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

である．

左舷（*Left*），右舷（*Right*）に働く力 P_{Left}，P_{Right} は，それぞれ舷側全体に働く一様分布の大気圧による $P_{Left}^{(0)}$, $P_{Right}^{(0)}$ と，没水部に働く三角形分布の静水圧による $P_{Left}^{(\gamma)}$, $P_{Right}^{(\gamma)}$ の和で求まるから，(7)式の浸水長 ℓ_L, ℓ_R を用いて，

$$\left.\begin{aligned} P_{Left} &= P_{Left}^{(0)} + P_{Left}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h)\sec\phi + \frac{1}{2}\gamma Z_f\,\ell_L \\ &= p_0(f+h)\sec\phi + \frac{1}{2}\gamma f^2\frac{\sec\phi\cos\theta}{1+\varepsilon} \\ P_{Right} &= P_{Right}^{(0)} + P_{Right}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h)\sec\phi + \frac{1}{2}\gamma Z_f\,\ell_R \\ &= p_0(f+h)\sec\phi + \frac{1}{2}\gamma f^2\frac{\sec\phi\cos\theta}{1-\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

となる．甲板（*Upper*）に働く力 P_{Upper} は，大気圧による $P_{Upper}^{(0)}$ のみが作用するから，

$$\begin{aligned} P_{Upper} &= P_{Upper}^{(0)} \\ &= 2p_0(f+h)\tan\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14) \end{aligned}$$

となる．

2.3　η 方向と ζ 方向の合力 $F_{-\eta}$, $F_{-\zeta}$

浮体固定の $-\eta$，$-\zeta$ 方向に働く合力 $F_{-\eta}$，$F_{-\zeta}$ は，(13),(14)式の P_{Left}，P_{Right}，P_{Upper} を用いて，

$$\left.\begin{aligned} F_{-\eta} &= P_{Right}\cos\phi - P_{Left}\cos\phi \\ &= \frac{1}{2}\gamma f^2\cos\theta\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \\ &\quad + p_0(f+h) - p_0(f+h) \\ &= \gamma f^2\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cos\theta = \gamma A\sin\theta \\ F_{-\zeta} &= P_{Right}\sin\phi + P_{Left}\sin\phi - P_{Upper} \\ &= \frac{1}{2}\gamma f^2\tan\phi\cos\theta\left(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \\ &\quad + 2p_0(f+h)\tan\phi - P_{Upper}^{(0)} \\ &= \gamma f^2\frac{\tan\phi}{1-\varepsilon^2}\cos\theta = \gamma A\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

のように，それぞれ浮力 γA の傾斜角 θ に関する正弦成分と余弦成分として求まる．この結果から，大気圧 p_0 は相殺して，浮体に作用する合力には寄与しないことが分かる．

2.4　y 方向と z 方向の合力 F_{-y}, F_{-z}

水平成分（$-y$ 方向）の F_{-y}，鉛直成分（$-z$ 方向）の F_{-z} を，前節の $F_{-\eta}$，$F_{-\zeta}$ を座標変換して求める．

水平成分の F_{-y} は，

$$
\begin{aligned}
F_{-y} &= F_{-\eta}\cos\theta - F_{-\zeta}\sin\theta \\
&= \gamma A\,(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta) \\
&= 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)
\end{aligned}
$$

となって，横傾斜して左右非対称な場合でも，合力の水平成分は生じない．　鉛直成分の F_{-z} は，

$$
\begin{aligned}
F_{-z} &= F_{-\zeta}\cos\theta + F_{-\eta}\sin\theta \\
&= \gamma A\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \gamma A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)
\end{aligned}
$$

のように，比重量 γ と，(10)式に示す三角柱の水面下の横断面積 A の積で得られていて，Archimedes の原理が教える，浮力である．

この F_{-y}，F_{-z} については，(13),(14)式の P_{Left}，P_{Right}，P_{Upper} から，直接，求めることもできる．

実際，水平成分の F_{-y} は，

$$
\begin{aligned}
F_{-y} &= P_{Right}\cos(\phi+\theta) - P_{Left}\cos(\phi-\theta) + P_{Upper}\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\gamma f^2 \sec\phi\cos\theta \left\{ \frac{\cos(\phi+\theta)}{1-\varepsilon} - \frac{\cos(\phi-\theta)}{1+\varepsilon} \right\} \\
&\quad + p_0(f+h) \\
&\qquad \times \Big[\sec\phi \left\{ \cos(\phi+\theta) - \cos(\phi-\theta) \right\} + 2\tan\phi\sin\theta \Big] \\
&= -\gamma f^2 \sec\phi\cos\theta \;\frac{\sin\phi\sin\theta - \varepsilon\cos\phi\cos\theta}{1-\varepsilon^2} \\
&\qquad -2p_0(f+h)\sin\theta\,(\sin\phi\sec\phi - \tan\phi) \\
&= 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)
\end{aligned}
$$

となり，鉛直成分の F_{-z} は，

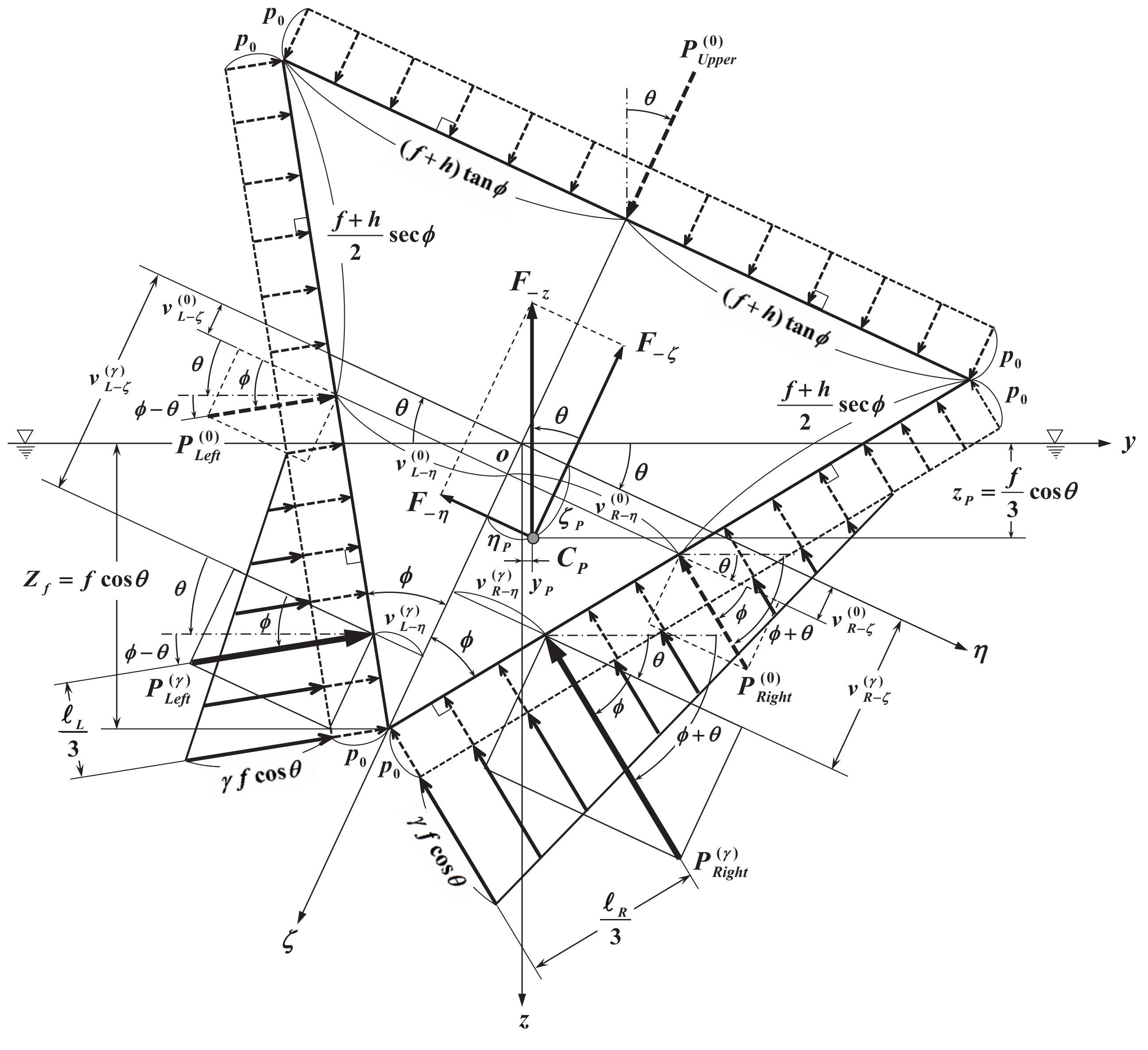

図２　横傾斜した三角柱の横断面に作用する静水圧の分布と圧力中心

$$
\begin{aligned}
F_{-z} &= P_{Right}\sin(\phi+\theta)+P_{Left}\sin(\phi-\theta)-P_{Upper}\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\gamma f^2\sec\phi\cos\theta\left\{\frac{\sin(\phi+\theta)}{1-\varepsilon}+\frac{\sin(\phi-\theta)}{1+\varepsilon}\right\} \\
&\quad + p_0(f+h) \\
&\quad\quad \times\left[\sec\phi\left\{\sin(\phi+\theta)+\sin(\phi-\theta)\right\}-2\tan\phi\cos\theta\right] \\
&= \gamma f^2\sec\phi\cos\theta\ \frac{\sin\phi\cos\theta+\varepsilon\cos\phi\sin\theta}{1-\varepsilon^2} \\
&\quad +2p_0(f+h)\cos\theta(\sin\phi\sec\phi-\tan\phi) \\
&= \gamma f^2\sec\phi\cos\theta\ \frac{\sin\phi\sec\theta}{1-\varepsilon^2} \\
&= \gamma f^2\frac{1}{1-\varepsilon^2}\tan\phi=\gamma A \qquad \cdots\cdots\cdots(19)
\end{aligned}
$$

となって，共に大気圧 p_0 は相殺され，$F_{-\eta}$，$F_{-\zeta}$ の座標変換から得られた(16),(17)式と同一の結果が得られることから，2.2 節の圧力による力が，正しく計算されていることを確認できた．

2. 5　η, ζ 方向の圧力によるモーメント

三角柱側面に垂直に働く圧力による力 P_{Left}，P_{Right} の η 方向成分によって生ずる，o 点回りのモーメント M_η を計算することを考える．

等分布の大気圧成分 $^{(0)}$ による左右両舷の ζ 軸に平行なレバー $v_{L-\zeta}^{(0)}$，$v_{R-\zeta}^{(0)}$ は，舷側長が $(f+h)\sec\phi$ だから，

$$
\begin{aligned}
v_{L-\zeta}^{(0)} = v_{R-\zeta}^{(0)} &= f-\frac{(f+h)\sec\phi}{2}\cos\phi \\
&= f-\frac{f+h}{2}=\frac{f-h}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)
\end{aligned}
$$

のように，左右同長として得られる．

三角形分布の静水圧成分 $^{(\gamma)}$ による左右両舷の ζ 軸に平行なレバー $v_{L-\zeta}^{(\gamma)}$，$v_{R-\zeta}^{(\gamma)}$ は，(7)式の浸水長 ℓ_L, ℓ_R を用いて，

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{L-\zeta}^{(\gamma)} &= f-\frac{\ell_L}{3}\cos\phi=f-\frac{1}{3(1+\varepsilon)}f \\
&=\frac{2+3\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}f \\
v_{R-\zeta}^{(\gamma)} &= f-\frac{\ell_R}{3}\cos\phi=f-\frac{1}{3(1-\varepsilon)}f \\
&=\frac{2-3\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}f
\end{aligned}
\right\}\cdots(21)
$$

となる． これにより，原点 o に関する η 方向の圧力による時計回りのモーメント M_η は，(13), (20), (21)式を用いて，

$$
\begin{aligned}
M_\eta &= P_{Right}^{(0)}\cos\phi\cdot v_{R-\zeta}^{(0)}+P_{Right}^{(\gamma)}\cos\phi\cdot v_{R-\zeta}^{(\gamma)} \\
&\quad -(P_{Left}^{(0)}\cos\phi\cdot v_{L-\zeta}^{(0)}+P_{Left}^{(\gamma)}\cos\phi\cdot v_{L-\zeta}^{(\gamma)}) \\
&= \frac{1}{6}\gamma f^3\cos\theta\left\{\frac{2-3\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}-\frac{2+3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right\} \\
&\quad + p_0(f+h)\cdot(v_{R-\zeta}^{(0)}-v_{L-\zeta}^{(0)}) \\
&= \frac{1}{3}\gamma f^3\frac{\varepsilon(1-3\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^2}\cos\theta \\
&= \frac{1}{3}\gamma fA\frac{1-3\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(22)
\end{aligned}
$$

のように，大気圧 p_0 に依らず求まる．

同様に，P_{Left}, P_{Right} の ζ 方向成分と P_{Upper} によって生ずる，o 点回りのモーメント M_ζ を，計算する．

大気圧成分 $^{(0)}$ による η 軸に平行なレバー $v_{L-\eta}^{(0)}$，$v_{R-\eta}^{(0)}$ は，

$$
\begin{aligned}
v_{L-\eta}^{(0)} = v_{R-\eta}^{(0)} &= \frac{(f+h)\sec\phi}{2}\sin\phi \\
&= \frac{f+h}{2}\tan\phi \qquad \cdots\cdots\cdots(23)
\end{aligned}
$$

のように，(20)式と同様，左右同長である．

静水圧成分 $^{(\gamma)}$ による左右両舷の η 軸に平行なレバー $v_{L-\eta}^{(\gamma)}$, $v_{R-\eta}^{(\gamma)}$ は，(7)式の ℓ_L, ℓ_R を用いて，

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{L-\eta}^{(\gamma)} &= \frac{\ell_L}{3}\sin\phi=\frac{\tan\phi}{3(1+\varepsilon)}f \\
v_{R-\eta}^{(\gamma)} &= \frac{\ell_R}{3}\sin\phi=\frac{\tan\phi}{3(1-\varepsilon)}f
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots(24)
$$

となる． よって，原点 o に関する ζ 方向の圧力による反時計回りのモーメント M_ζ は，(13), (23), (24)式により，

$$
\begin{aligned}
M_\zeta &= P_{Right}^{(0)}\sin\phi\cdot v_{R-\eta}^{(0)}+P_{Right}^{(\gamma)}\sin\phi\cdot v_{R-\eta}^{(\gamma)} \\
&\quad -(P_{Left}^{(0)}\sin\phi\cdot v_{L-\eta}^{(0)}+P_{Left}^{(\gamma)}\sin\phi\cdot v_{L-\eta}^{(\gamma)}) \\
&\quad + P_{Upper}\times 0 \\
&= \frac{1}{6}\gamma f^3\tan^2\phi\cos\theta\left\{\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right\} \\
&\quad + p_0(f+h)\tan\phi\cdot(v_{R-\eta}^{(0)}-v_{L-\eta}^{(0)}) \\
&= \frac{2}{3}\gamma f^3\frac{\varepsilon\tan^2\phi}{(1-\varepsilon^2)^2}\cos\theta \\
&= \frac{2}{3}\gamma fA\frac{\tan^2\phi}{1-\varepsilon^2}\sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(25)
\end{aligned}
$$

のように，M_η と同様，大気圧 p_0 に依らず求まる．

2.6　横傾斜時の圧力中心 C_P の位置決め

圧力中心 C_P を，浮体固定の $o-\eta\zeta$ 座標系で位置決めするには，第１報(2)，第２報(11)，第３報(20)と同様に，大串(21)が用いた水理学の手法に基づいて，η 座標 η_P は，$-\zeta$ 方向の圧力による合力 $F_{-\zeta}$ とモーメント M_ζ により，(15),(25)式を用いて，

$$\eta_P=\frac{M_\zeta}{F_{-\zeta}}=\frac{\dfrac{2}{3}\gamma f A\,\dfrac{\tan^2\phi}{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{\gamma A\cos\theta}=\frac{2}{3}f\,\frac{\varepsilon\tan\phi}{1-\varepsilon^2}\quad\cdots\cdots(26)$$

のように，ζ 座標 ζ_P は，$-\eta$ 方向の圧力による $F_{-\eta}$ と M_η により，(15),(22)式を用いて，

$$\zeta_P=\frac{M_\eta}{F_{-\eta}}=\frac{\dfrac{1}{3}\gamma f A\,\dfrac{1-3\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{\gamma A\sin\theta}=\frac{1}{3}f\,\frac{1-3\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\quad\cdots\cdots(27)$$

のように定めることができる． この ζ_P は，(27)式に示す通り，傾斜角 $\theta\to 0$ で 0 となるゼロ因子 $\sin\theta$ が，分母と分子で相殺することで得られている． 当初から，$\theta=0$ として直立状態で計算すれば，分母の $F_{-\eta}$ も分子の M_η も，共に平衡してゼロとなるから，不定形となって，ζ_P を確定できない． これが，横傾斜させることで，圧力中心位置を確定できた所以である．

これに対し，(26)式の η 座標 η_P は，$\theta\to 0$ としても，分子の M_ζ は平衡してゼロとなるが，分母の $F_{-\zeta}$ は浮力の余弦成分として有限値を取るから，当初から直立状態で計算しても，$\eta_P=0$ として，求まる訳である．

得られた浮体固定座標での圧力中心 C_P（η_P,ζ_P）を，空間固定の座標系 (y_P, z_P) に変換してみる． 水平方向の y_P は，

$$\begin{aligned}y_P&=\eta_P\cos\theta-\zeta_P\sin\theta\\&=\frac{1}{3}f\,\frac{2\varepsilon\tan\phi\cos\theta-(1-3\varepsilon^2)\sin\theta}{1-\varepsilon^2}\\&=\frac{1}{3}f\,\frac{2\tan^2\phi+3\varepsilon^2-1}{1-\varepsilon^2}\sin\theta\quad\cdots\cdots(28)\end{aligned}$$

のように，鉛直方向の z_P は，

$$\begin{aligned}z_P&=\zeta_P\cos\theta+\eta_P\sin\theta\\&=\frac{1}{3}f\,\frac{(1-3\varepsilon^2)\cos\theta+2\varepsilon\tan\phi\sin\theta}{1-\varepsilon^2}\\&=\frac{1}{3}f\,\frac{(1-3\varepsilon^2)+2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\cos\theta\\&=\frac{1}{3}f\cos\theta\quad\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

のように求まる． 後者の鉛直方向の z_P は，水面を底辺とする，高さ $f\cos\theta$ の三角形の，鉛直方向の図心位置を示していることは，明らかであるから，前者の y_P についても，水平方向の図心位置に一致するかを，次節で検証する．

2.7　水面下の三角形の図心位置による検証

図３は，図２の三角柱の横断面の，水面下の面積を抽出したものである． 三角形の頂点 K と，その鉛直上方に取った原点 o' を結ぶ z' 軸によって，$\triangle KT_LT_R$ を左右２個に分割して考える．

左側（*Left*）の三角形 $\triangle Ko'T_L$ の面積を A_L，底辺を y_L，右側（*Right*）の三角形 $\triangle Ko'T_R$ の面積を A_R，底辺を y_R とする． 高さは共通で，$\overline{o'K}=Z_f$ である．

このとき，左右それぞれの面積 A_L, A_R は，

$$\left.\begin{aligned}A_L&=\frac{1}{2}Z_f\,y_L\\A_R&=\frac{1}{2}Z_f\,y_R\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(30)$$

である． 両者の和である $\triangle KT_LT_R$ の面積 A は，

$$\begin{aligned}A&=A_L+A_R\\&=\frac{1}{2}Z_f(y_L+y_R)\\&=\frac{1}{2}Z_f(b_L+b_R)=\frac{1}{1-\varepsilon^2}f^2\tan\phi\quad\cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

のように，2.1 節の(10)式によって求められる．

また，底辺に相当する y_L, y_R は，それぞれ ϕ と θ を用いて，

$$\left.\begin{aligned}y_L&=Z_f\tan(\phi-\theta)=Z_f\,\frac{\tan\phi-\tan\theta}{1+\varepsilon}\\y_R&=Z_f\tan(\phi+\theta)=Z_f\,\frac{\tan\phi+\tan\theta}{1-\varepsilon}\end{aligned}\right\}\cdots(32)$$

である．

三角形ΔKT_LT_Rの，z'軸に関する面積モーメントM_z'は，分割した左右それぞれの三角形$\Delta Ko'T_L$，$\Delta Ko'T_R$の図心g_L, g_Rまでの，z'軸からの水平距離がレバーとなるから，

$$\begin{aligned} M_z' &= A_R \times \frac{y_R}{3} - A_L \times \frac{y_L}{3} \\ &= \frac{1}{6} Z_f \left(y_R{}^2 - y_L{}^2 \right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (33) \end{aligned}$$

によって，求め得る． y_L, y_Rに (32)式，Z_fに(12)式を用い，εが(5)式であることを使って，計算を進めると，M_z'は，

$$\begin{aligned} M_z' &= \frac{1}{6} Z_f{}^3 \left\{ \frac{(\tan\phi + \tan\theta)^2}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{(\tan\phi - \tan\theta)^2}{(1+\varepsilon)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{6} Z_f{}^3 \, \frac{4\,\varepsilon \sec^2\phi \sec^2\theta}{(1-\varepsilon^2)^2} \\ &= \frac{2}{3} f^{\,3} \, \frac{\tan\phi \sec^2\phi}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin\theta \\ &= \frac{2}{3} f A \, \frac{\sec^2\phi}{1-\varepsilon^2} \sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (34) \end{aligned}$$

のように，(31)式のAを用いて，求まる．

これによって，三角形ΔKT_LT_Rの図心Gの，z'軸からの水平距離y_G'は，(34)式のM_z'を，面積Aで除すことにより，

$$\begin{aligned} y_G' &= \frac{M_z'}{A} \\ &= \frac{2}{3} f \, \frac{\sec^2\phi}{1-\varepsilon^2} \sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (35) \end{aligned}$$

のように，定まる．

よって，図心Gの元々のz軸からの水平距離y_Gは，両原点間の距離$\overline{o'o}$が，

$$\overline{o'o} = b_L - y_L = f \sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

であるから，

$$\begin{aligned} y_G &= y_G' - \overline{o'o} \\ &= y_G' - f \sin\theta \\ &= \frac{1}{3} f \, \frac{2\sec^2\phi - 3\,(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2} \sin\theta \\ &= \frac{1}{3} f \, \frac{2\tan^2\phi + 3\varepsilon^2 - 1}{1-\varepsilon^2} \sin\theta \qquad \cdots\cdots (37) \end{aligned}$$

のように，求められる．

一方，y軸から図心Gまでの鉛直距離z_Gは，ΔKT_LT_Rが，水面（y軸）を底辺とする，高さ$Z_f = f\cos\theta$の三角形であるから，計算するまでもなく，

$$z_G = \frac{1}{3} f \cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

である．

よって，(28)式と(37)式，(29)式と(38)式を，見較べることにより，

$$\left. \begin{aligned} y_P &= y_G \\ z_P &= z_G \end{aligned} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

であることが分かった．

この結果は，横傾斜時の左右非対称な三角形断

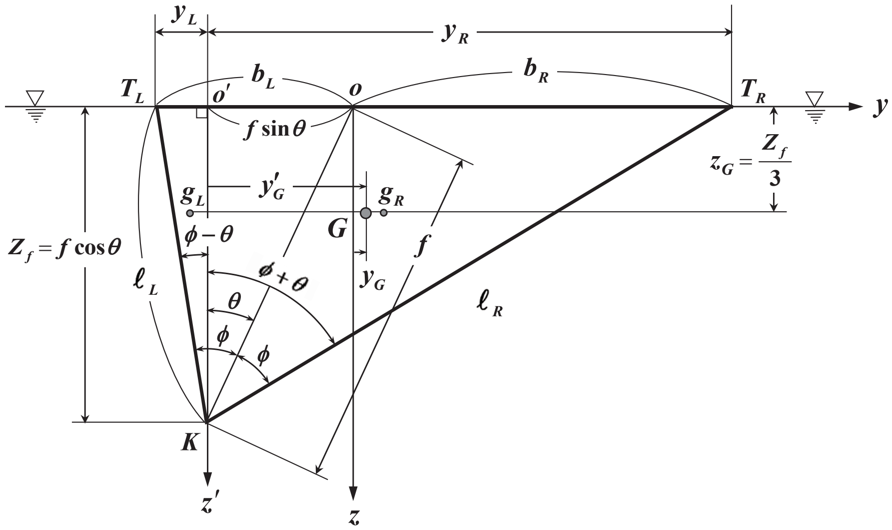

図 3　水面下の三角形断面の図心位置

面の圧力中心が，水面下の図心に一致することを示しているから，圧力中心が，周知の浮心位置であることを証明できた．

2.8 直立時の圧力中心 C_P の位置決め

前節の(39)式で得られた帰結を，明確にするために，傾斜状態で得られた圧力中心 C_P の座標 (η_P, ζ_P) において，$\theta \to 0$ とすることで，直立状態の三角柱の圧力中心を求めてみよう．

(5)式の ε は，横傾斜角を $\theta \to 0$ とすると，

$$\varepsilon\big]_{\theta=0} = \tan\phi \tan\theta\big]_{\theta=0} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

であるから，2.6 節の(26),(27)式により，

$$C_P(\eta_P, \zeta_P)\big]_{\theta=0} = \left(0, \frac{f}{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

のように，或いは，$\theta \to 0$ では，$o-\eta\zeta$ 座標系と $o-yz$ 座標系は一致するから，(28),(29)式によっても，同様に，

$$C_P(y_P, z_P)\big]_{\theta=0} = \left(0, \frac{f}{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

のように求まる．この(41),(42)両式は，明らかに，水面下の二等辺三角形の図心位置を示していることから，三角柱に対して，静水圧の圧力中心が，周知の浮心位置であることを，証明できた．

3. 後書き

第1報（矩形断面[2]），第2報（任意の断面形状[11]），第3報（半没円柱[20]）に続いて，この第4報では,三角柱に対しても,静水圧の圧力中心が，周知の浮心位置（三角形の図心）に一致することを，証明した．

謝辞

著者が前職（九州大学 応用力学研究所 津屋崎海洋災害実験所）に赴任した1987年頃，当時の実験所長だった，故 大楠 丹 先生が，夜の博多の街の酒席で「浮心というのは，圧力中心ではないのじゃないか？」と，話されたことを想い出します．

その言葉が，頭の深層に残っていて，現職で「浮体静力学」の講義を担当することになり，本稿の研究テーマに取り組む契機になったことを実感し，先生の慧眼に，今更ながら敬意を捧げて，本稿を閉じます．

参考文献

(1) Archimedes：The Works of Archimedes，On Floating Bodies，Book I & Book II，Edited and Translated by T. L. Heath，Cambridge University Press，pp.253～300, 1897.

(2) 堀　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — 浮心＝圧力中心の証明 —，日本航海学会誌，第203号，pp.90～94，2018年1月．

(3) 小松 正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察，舟艇技報，No.93，pp.21～25，2007年12月．

(4) 瀬戸 秀幸：「浮心」考 — 小松：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察 の再検討 —，第14回推進性能・運動性能合同研究会，2010年．

(5) 瀬戸 秀幸：浮力の作用中心に関する一考察，日本船舶海洋工学会 講演会論文集，第12号，pp.529～532，2011年5月．

(6) 鈴木 勝雄：神説「浮心の法則」，2011年1月．

(7) 芳村康男，安川宏紀：浮力の作用中心と復原性の再考，第16回 推進性能・運動性能合同研究会，2011年．

(8) 小松 正彦：座標変換による浮力の作用中心に関する考察，第19回 推進性能・運動性能合同研究会，2012年．

(9) 渡辺 倫堂：船体周りの圧力分布と浮心の関係に関する研究，防衛大学校 機械システム工学科 船舶工学講座 卒業論文，(指導) 藪下和樹，岡畑 豪，pp.1～25，2013年3月．

(10) 慎 燦益：造船幾何学 — 造船設計の基礎知識 —，第4章 排水量等計算と曲線図，4.2 アルキメデスの原理，海文堂，pp.125～133，2013年2月（初版）．

(11) 堀　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その2：任意の断面形状の場合 —，日本航海学会誌，第205号，pp.28～34，2018年7月．

(12) 堀　勉：「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開 — その 1：「浮心＝圧力中心」の証明 —，舟艇技法，第 135 号，pp.1～10，2018 年 9 月．

(13) 一色 浩：Pressure Center，2018 年 3 月．

(14) 藪下 和樹：船舶の復原 及び 推進性能（2018 年度版），第 4 章 浮力と圧力分布の関係，防衛大学校 機械システム工学科 テキスト，pp.81～90，2018 年 4 月．

(15) 藪下 和樹，日比 茂幸，岡畑 豪：物体周りの圧力分布による浮心位置の同定，第 10 回 推進・運動性能研究会，pp.1～14，2018 年 6 月．

(16) 鈴木 勝雄：見かけの浮心について — 堀論文(2) に関連して —，2018 年 4 月．

(17) 小松 正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察（続報），舟艇技法，第 136 号，pp.12～18，2018 年 12 月．

(18) 小松 正彦：圧力分布に着目した浮体の「浮力の作用中心」，第 13 回 推進・運動性能研究会，pp.1～22，2019 年 6 月．

(19) 一色 浩：浮心について，日本船舶海洋工学会講演会 論文集，第 28 号，No. 2019S-OS2-9，pp.131～132，2019 年 5 月．

(20) 堀　勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その 3：半没円柱に対する証明 —，日本航海学会誌，第 208 号，pp.60～68，2019 年 4 月．

(21) 大串 雅信：理論船舶工学（上巻），1.3 浮力の例題，海文堂，pp.4～5，1971 年 6 月（初版）．

令和 2 年 5 月 5 日 投稿

ホリ　ツトム
堀　勉
正会員　長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授（〒851-0193 長崎市 網場町 536）
E-mail：HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp，HomePage：http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/
1987 年 大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了，工学博士
所属学会：日本航海学会，日本船舶海洋工学会の各会員；　研究テーマ：水面波動力学

日本航海学会誌　NAVIGATION

令和2年7月　第213号　　JUL 2020 No. 213

日本航海学会
Japan Institute of Navigation
c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN
定価 2,000 円（税込）