学術刊行物　ISSN 0919-9985


# 日本航海学会誌
# NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて


## 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
### ― 浮心＝圧力中心の証明 ―

堀　　勉

## *A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure*
### *― Proof that Centre of Buoyancy is Equal to Centre of Pressure ―*

*Tsutomu HORI*

平成30年
1月
第203号

## 研究・調査

# 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定
## — 浮心＝圧力中心の証明 —

堀　　勉

# A Positioning on Ship's Centre of Buoyancy Derived by Surface Integral of Hydrostatic Pressure
## — Proof that Centre of Buoyancy is Equal to Centre of Pressure —

Tsutomu HORI

***キーワード***：　*浮心，圧力中心，静水圧，圧力積分，Archimedes の原理*

## 1．前書き

船に作用する浮力の中心「浮心」は，水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち，水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは，造船学上，否，物理学上の周知の事実である。

Archimedes の原理[1]が教える浮力は，静水圧の圧力積分によって明快に求められるが，浮心位置については，物理学[2),(3]や水理学[4),(5]，造船学[6]~[13]や航海力学[14), (15), (16]等，どの教科書にも，水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると，記述されている。

浮力が，静水圧の積分値として求まるのだから，その浮心位置についても，静水圧を浮体表面で積分することで求め得ると考えられるが，そのような説明は，著者が文献調査する限り，見付からない。

そんな状況の中，最近でも，小松[17]によって，従来からの浮心は，圧力中心ではない？との問題提起が成された。小松が導いた圧力中心の結果は，大気圧 $p_0$ の値に依存する形で得られており，$p_0=0$ とした場合，矩形断面の圧力中心は，底面の中央に位置するというものである。 この「浮心≠圧力中心？」の議論は，著者を含めた造船学の研究者の間で，屡々議論になる問題であるが，復原性の観点からも，浮心位置が水面下の幾何学的形状の体積中心である事実は，間違いないことである為，この議論に対する明確な答えが出ないまま，現在に至っている状況である。

これに対し，薮下は，小松の問題提起を「小松のパラドックス」と名付け，自身の教科書[18]で，その点に関して，圧力分布をベクトル演算で積分することにより，圧力中心は，本来の浮心位置に等しいとの結論を述べている。只，浮体内部を水塊に置き換えることにより，体積分に変換して計算している為[3]，鉛直方向の浮心位置については，議論の余地があるように思われる。

上述のような状況に鑑み，本稿では，2 次元の矩形断面について，静水圧を浮体表面で圧力積分することにより，圧力中心を決定する。その際，直立状態では，水平方向の力が平衡してゼロになる為，鉛直方向の圧力中心を定められないことが分かったので，浮体を $\theta$ だけ横傾斜させた状態で，静水圧を正しく圧力積分して，力とモーメントを計算することにより，傾斜時の圧力中心を決定した。その結果を，$\theta \to 0$ とすることで，圧力中心が，本来の浮心位置，即ち，水面下の矩形の図心

に位置すること導き得た。

本論により，「浮心＝圧力中心」であることを，2 次元の矩形断面ではあるが，静水圧の圧力積分により，明快に証明できたので，これを公表することも，強ち無意味ではないと考え，浅学菲才な著者が，碩学諸賢のご批判を受けることを覚悟で，敢えてご報告させて戴く次第である。

## 2．浮体の圧力中心 $C_P$ の位置決め

図 1 は，幅 $2b$，深さ $f+h$（吃水 $f$，乾舷 $h$）の 2 次元 矩形断面が，右舷側に $\theta$ だけ横傾斜した場合を示す。底面中央に原点 $o$ を置き，浮体に固定した座標系を $o-\xi\eta$，空間に固定した座標系を $o-xy$ とする。

図中，大気圧を破線，静水圧を実線，それぞれの圧力を細線，力を太線のベクトルで示していて，全て，浮体表面に対して垂直方向に作用する。

### 2. 1　浮体表面に働く圧力による力

横傾斜角 $\theta$ によって，図 1 に示す左舷底面 $L$ 点，右舷底面 $R$ 点での，水面下の深度 $Z_L$，$Z_R$ は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} Z_L &= (f-b\tan\theta)\cos\theta \\ Z_R &= (f+b\tan\theta)\cos\theta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

である。

左舷（*Left*），右舷（*Right*）に働く力 $P_{Left}$，$P_{Right}$ は，それぞれ舷側全体に働く一様分布の大気圧による $P^{(0)}_{Left}$，$P^{(0)}_{Right}$ と，没水部に働く三角形分布の静水圧による $P^{(\gamma)}_{Left}$，$P^{(\gamma)}_{Right}$ の和で求まるから，大気圧を $p_0$，水の比重量を $\gamma$ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} P_{Left} &= P^{(0)}_{Left} + P^{(\gamma)}_{Left} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma Z_L (f-b\tan\theta) \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma (f-b\tan\theta)^2\cos\theta \\ P_{Right} &= P^{(0)}_{Right} + P^{(\gamma)}_{Right} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma Z_R (f+b\tan\theta) \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma (f+b\tan\theta)^2\cos\theta \end{aligned}\right\}(2)$$

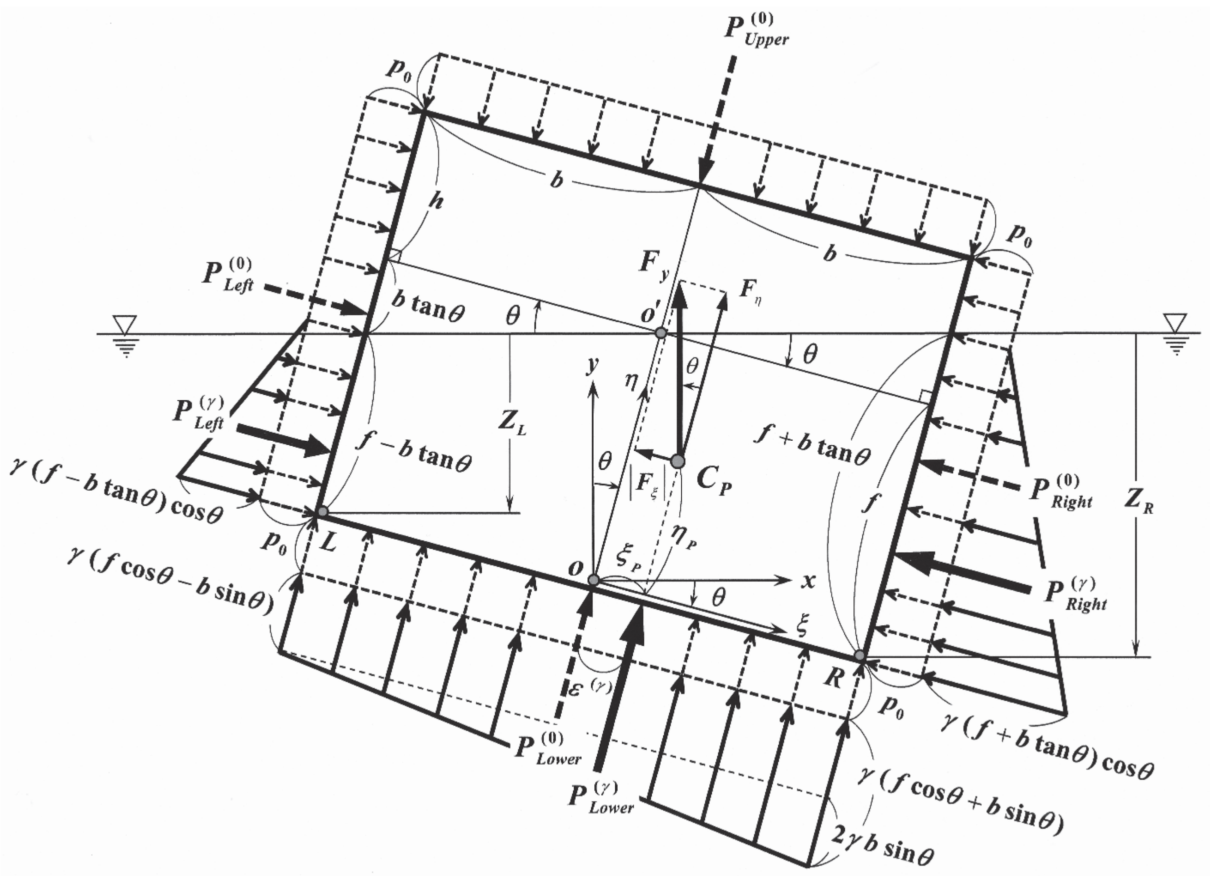


図 1　横傾斜した矩形断面に作用する静水圧の分布と圧力中心

となる。甲板（*Upper*）に働く力$P_{Upper}$は，大気圧による$P^{(0)}_{Upper}$のみで，底面（*Lower*）に働く力$P_{Lower}$は，大気圧による$P^{(0)}_{Lower}$と，台形分布の静水圧による$P^{(\gamma)}_{Lower}$の和で求まるから，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} P_{Upper} &= P^{(0)}_{Upper} \\ &= 2p_0 b \\ P_{Lower} &= P^{(0)}_{Lower} + P^{(\gamma)}_{Lower} \\ &= 2p_0 b + \frac{\gamma Z_L + \gamma Z_R}{2}\cdot 2b \\ &= 2p_0 b + 2\gamma f b\cos\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

となる。

### 2.2 $\xi$方向と$\eta$方向の合力$F_\xi, F_\eta$

浮体固定の$\xi, \eta$方向に働く合力$F_\xi, F_\eta$は，(2)式中の$P_{Left}, P_{Right}$を用いて，

$$\left.\begin{aligned} F_\xi &= P_{Left} - P_{Right} = P^{(\gamma)}_{Left} - P^{(\gamma)}_{Right} \\ &= -2\gamma f b\sin\theta = -\left|F_\xi\right| \\ F_\eta &= P_{Lower} - P_{Upper} = P^{(\gamma)}_{Lower} \\ &= 2\gamma f b\cos\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

のように，共に大気圧$p_0$は相殺して求まり，$F_\xi$は左向き，$F_\eta$は上向きであることが分かる。

### 2.3 $x$方向と$y$方向の合力$F_x, F_y$

前節で求めた$F_\xi, F_\eta$を用いて，水平成分の$F_x$と，鉛直成分の$F_y$を求めてみると，

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_\eta\sin\theta - \left|F_\xi\right|\cos\theta \\ &= 2\gamma f b(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) = 0 \\ F_y &= F_\eta\cos\theta + \left|F_\xi\right|\sin\theta \\ &= 2\gamma f b(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2\gamma f b \end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

のように，横傾斜して左右非対称な場合でも，圧力積分による合力として，水平成分$F_x$は生じないことが分かる。鉛直成分$F_y$については，

$$\begin{aligned} F_y &= \gamma\cdot(2b\cdot f) \\ &= \gamma\cdot(\text{水面下の矩形の面積}) = \text{浮力} \cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

のように書けて，Archimedesの原理が教える通りの浮力である。

### 2.4 $o$点回りのモーメントの計算

$\xi$方向に働く力$P^{(0)}_{Right}, P^{(\gamma)}_{Right}$と$P^{(0)}_{Left}, P^{(\gamma)}_{Left}$による，$o$点を中心とする反時計回りのモーメント$M_\xi$は[8]，(2)式を用いて，

$$\begin{aligned} M_\xi &= P^{(0)}_{Rigrt}\cdot\frac{f+h}{2} + P^{(\gamma)}_{Right}\cdot\frac{f+b\tan\theta}{3} \\ &\quad - P^{(0)}_{Left}\cdot\frac{f+h}{2} - P^{(\gamma)}_{Left}\cdot\frac{f-b\tan\theta}{3} \\ &= \gamma b\sin\theta\,(f^2 + \frac{b^2}{3}\tan^2\theta) \cdots\cdots\cdots(7) \end{aligned}$$

のように，$p_0$に関する項は相殺されて，計算される。

$o$点から$P^{(\gamma)}_{Lower}$の着力点までの距離$\varepsilon^{(\gamma)}$は，台形分布を一様分布と三角分布の重畳で考えれば，モーメントに寄与するのは，三角分布のみであるから，(3)式を用いて，

$$\varepsilon^{(\gamma)} = \frac{2\gamma b^2\sin\theta\cdot\left(b - \dfrac{2b}{3}\right)}{P^{(\gamma)}_{Lower}} = \frac{b^2}{3f}\tan\theta \cdots\cdots(8)$$

のように求まる。

$\eta$方向に働く力$P^{(0)}_{Lower}, P^{(\gamma)}_{Lower}$と$P^{(0)}_{Upper}$による$o$点回りのモーメント$M_\eta$も[8]，やはり，

$$\begin{aligned} M_\eta &= P^{(0)}_{Lower}\times 0 + P^{(\gamma)}_{Lower}\cdot\varepsilon^{(\gamma)} - P^{(0)}_{Upper}\times 0 \\ &= P^{(\gamma)}_{Lower}\cdot\varepsilon^{(\gamma)} = \frac{2}{3}\gamma b^3\sin\theta \cdots\cdots\cdots(9) \end{aligned}$$

のように，大気圧$p_0$に依らず求まる。

### 2.5 圧力中心$C_P$の位置決め

2.2節(4)式で求めた$F_\xi, F_\eta$と，2.4節(7),(9)式で計算した$M_\xi, M_\eta$を用いて，静水圧による圧力中心$C_P$の位置を決定することを考える。

前節で求めた$o$点に関する反時計回りのモーメント$M_\xi, M_\eta$は，$C_P(\xi_P, \eta_P)$に働く合力$\left|F_\xi\right|, F_\eta$によって，

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \left|F_\xi\right|\cdot\eta_P \\ M_\eta &= F_\eta\cdot\xi_P \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

のように計算できるから[8]，$o$点から圧力中心$C_P$までの$\xi, \eta$方向の距離$\xi_P, \eta_P$は，それぞれ，

$$\begin{aligned} \xi_P &= \frac{M_\eta}{F_\eta} \\ &= \frac{P^{(\gamma)}_{Lower}\cdot\varepsilon^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}_{Lower}} = \varepsilon^{(\gamma)} = \frac{b^2}{3f}\tan\theta \cdots\cdots(11) \end{aligned}$$

$$\eta_P = \frac{M_\xi}{|F_\xi|} = \frac{\gamma b \sin\theta\,(f^2 + \frac{b^2}{3}\tan^2\theta)}{2\gamma f b \sin\theta} = \frac{f}{2} + \frac{b^2}{6f}\tan^2\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

のように，決定できる。ここに，横傾斜角 $\theta \to 0$ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} \xi_P &= \frac{b^2}{3f}\theta + \cdots \\ \eta_P &= \frac{f}{2} + \frac{b^2}{6f}\theta^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

となるから，直立状態での圧力中心は，$\theta = 0$ とすればよく，

$$\left.\begin{aligned} (\xi_P, \eta_P) &= \left(0, \frac{f}{2}\right) \\ C_P &= B \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

のように，大気圧 $p_0$ に依存することなく，矩形の図心として求まる。 これによって，静水圧による圧力中心 $C_P$ が，周知の浮心位置 $B$ と一致することを証明できた。

### 2. 6 横傾斜時の浮心移動距離による検討

図 1 に示す静水面上の浮体中央 $o'$ を頂点とする，左舷の三角形（露出部）から 右舷の三角形（没入部）への一部面積 $\left(\frac{1}{2}b^2\tan\theta\right)$ の移動による，水面下の全面積 $(2fb)$ の，$\xi$ 方向への浮心移動[19] の距離 $\delta\ell_\xi$ は，

$$\delta\ell_\xi = \frac{\left(\frac{1}{2}b^2\tan\theta\right)\cdot\frac{4b}{3}}{2fb} = \frac{b^2}{3f}\tan\theta \quad \cdots\cdots(15)$$

となる。(11)式で求めた圧力中心の $\xi_P$ は，この $\delta\ell_\xi$ と一致するから，本論の計算が正しいことを確認できた。

## 3. 後 書 き

前書きに書いた「浮心≠圧力中心？」の疑問は，著者が，長崎総合科学大学 船舶工学科（現在は，工学科 船舶工学コース）の必修科目として，十年以上前に「浮体静力学」を担当することになり，Archimedes の原理による浮力を，静水圧の圧力積分によって教えた後，翌週の講義準備をしているとき，浮心位置もその延長で，静水圧の圧力中心として簡単に説明が付くと思って計算してみると，位置決めをすることができず，おやっ？と思ったときに始まります。

その後，この疑問については，毎年，気になり乍らも，解決が付かないまま，浮心位置については，通常の教科書に倣って，水面下の幾何学的形状の体積中心であると，表題の圧力中心のことに触れることなく，その点を学生から質問されないように,その回だけは,淡々と講義してきました。

今回，その疑問を解決できたので，来年度からは，浮力に続いて浮心位置についても，静水圧の圧力積分によって整合性ある説明を，大学教員として自信を持って講義できる思いです。

もし，本論で展開した証明が，既に教科書に載っていたり，論文等で公表されているようでしたら，浅学非才な著者の文献調査不足によるところと，ご容赦戴きたい。

## 謝 辞

本論のテーマである，浮体に作用する静水圧による圧力中心の位置決めの問題は,著者の同僚で,超弦理論を使った 4 次元宇宙の生成を研究している，澁佐 雄一郎 教授（長崎総合科学大学 共通教育部門 理数グループ）との議論が切っ掛けとなり，解けたものである。

ここに記して，彼に深甚なる感謝の意を表したい。

## 参 考 文 献

(1) Archimedes : The Works of Archimedes， On Floating Bodies， Book I & Book II， Edited and Translated by T. L. Heath， Cambridge University Press， pp.253～300, 1897.

(2) 小谷 正雄：物理学概説 上巻 (改訂版)，第二篇 連続体の力学，§9 アルキメデスの原理，裳華房，pp.96～97，1950 年 10 月（第 1 版）.

(3) 金原 寿郎：基礎物理学 上巻，第 7 章 流体，§7.3 浮力，裳華房，pp.144～145，1963 年 3 月（第 1 版）.

(4) 石原 藤次郎, 本間 仁：応用水理学 (上) 一般水理学, 1-1 静水力学, 丸善, pp.3～6, 1957 年 4 月（第 1 版）.

(5) 吉川 秀夫：水理学 — 講義と演習 —, 第 4 章 静止流体の力学, 技報堂, pp.67～74, 1976 年 4 月（1 版 1 刷）.

(6) Pierre BOUGUER : Traité du Navire, de sa Construction, et de ses Mouvemens, (Treatise of the Ship, its Construction and its Movements), Seconde Section, Edited by Chez JOMBERT, Paris, pp.249～324, 1746.

(7) 西川 広：初等 船舶算法, 第 4 章 浮体の理論, 4-2 浮力, 海文堂, pp.83～85, 1964 年 7 月（初版）.

(8) 大串 雅信：理論船舶工学（上巻）, 第 1 章 水および浮体, 海文堂, pp.1～6, 1971 年 6 月（初版）.

(9) Norman A. HAMLIN, Lawrence L. GOLDBERG : Principles of Naval Architecture (2nd. Revision), Volume I - Stability and Strength, Chapter 1 - Ship Geometry, Chapter 2 - Intact Stability, Edited by Edward V. LEWIS, Society of Naval Architects and Marine Engineers, p.16～17, p.64, Jersey City, NJ, April 1988 (1st. Printing).

(10) Horst NOWACKI, Larrie D. FERREIRO : Historical Roots of the Theory of Hydrostatic Stability of Ships, 8th. International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, pp.1～30, 2003.

(11) Larrie D. FERREIRO : Ships and Science, The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800, Chapter 4 - Inventing the Metacenter, The MIT Press, pp.207～212, January 2010.

(12) 池田 良穂, 古川 芳孝, 片山 徹, 藤井 辰博, 村井 基彦, 山口 悟：船舶海洋工学シリーズ① 船舶算法と復原性, 第 3 章 排水量等計算と曲線図, 3.5 浮力と浮心, 日本船舶海洋工学会 能力開発センター 教科書編纂委員会 監修, 成山堂, pp.43～46, 2012 年 4 月（初版）.

(13) 慎 燦益：造船幾何学 — 造船設計の基礎知識 —, 第 4 章 排水量等計算と曲線図, 4.2 アルキメデスの原理, 海文堂, pp.125～133, 2013 年 2 月（初版）.

(14) 杉原 喜義：理論運用学（船舶力学編）, 第 2 章 浮力および排水量, 2.1 浮力, 海文堂, pp.13～14, 1964 年 7 月（初版）.

(15) 明渡 範次：基本 航海力学, 第 2 章 剛体の力学, 2.3.7 浮心, 海文堂, pp.110～111, 1983 年 6 月（初版）.

(16) 野原 威男 (原著), 庄司 邦昭 (著)：航海造船学【二訂版】, 第 2 編 船体の安定と動揺, 第 8 章 排水量, 8-1 浮力, 海文堂, pp.139～140, 2005 年 4 月（二訂初版）.

(17) 小松 正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察, 舟艇技報, No.93, pp.21～25, 2007 年 12 月.

(18) 藪下 和樹：船舶の復原 及び 推進性能（2017 年度版）, 第 4 章 浮力と圧力分布の関係, 防衛大学校 機械システム工学科, pp.75～88, 2017 年 6 月.

(19) 堀 勉：船のメタセンター半径 $\overline{BM}$ の導出に関する一考察, 日本航海学会誌, 創刊 第 200 号 記念号, pp.75～79, 2017 年 4 月.

平成 29 年 11 月 1 日投稿

堀 勉（ほり つとむ）
正会員　長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授（〒851-0193 長崎市 網場町 536）
E-mail：HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp, HomePage：http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/
1987 年 大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了, 工学博士
所属学会：日本航海学会, 日本船舶海洋工学会の各会員；　研究テーマ：水面波動力学

学術刊行物　ISSN 0919−9985

日本航海学会誌　NAVIGATION

平成30年1月　第203号　　JAN 2018 No. 203



日　本　航　海　学　会

Japan Institute of Navigation

c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN