

ISSN 1340-7341

舟艇技報

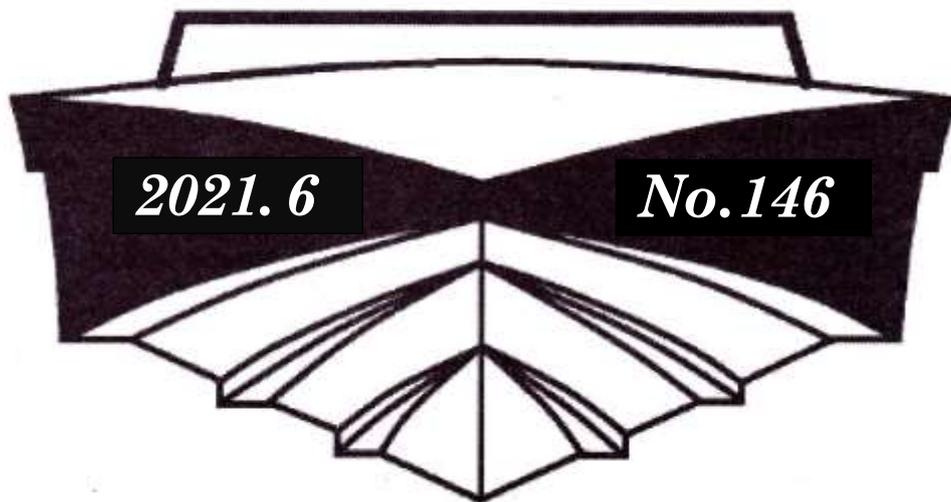
「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開

— その3：任意形状の没水体と浮体

に対する「浮心=圧力中心」の証明 —

長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授

堀 勉



Boat Engineering

一般財団法人 舟艇協会

— 技術資料 —

「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開

— その3：任意形状の没水体と浮体 に対する「浮心=圧力中心」の証明 —

長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授
堀 勉

1 緒 論

船に作用する浮力の中心「浮心」は、水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち、水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは、造船学上、否、物理学上の周知の事実である。

Archimedes の原理⁽¹⁾が教える浮力は、静水圧の圧力積分によって明快に求められるが、浮心位置については、物理学や水理学、造船学や航海力学など、どの教科書（例えば、その1⁽²⁾の参考文献(2)~(17)）にも、水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると記述されていて、静水圧による圧力中心としての説明は見当たらない。

そんな状況の中、2007年に、この舟艇技報上で小松⁽³⁾によって、「浮心≠圧力中心？」の問題提起が成され、日本船舶海洋工学会の推進性能・運動性能合同研究会等で、瀬戸^{(4),(5)}、鈴木(勝)⁽⁶⁾、芳村・安川⁽⁷⁾、小松⁽⁸⁾、藪下⁽⁹⁾、慎⁽¹⁰⁾らによって、活発に議論が成された。

この問題に対して、著者は2018年に、鉛直方向の圧力中心を定められない原因は、直立状態では水平方向の力が平衡してゼロになるためであると考へ、その打開策として、船を θ だけ横傾斜させた状態で、静水圧を圧力積分し、船に固定して傾斜した座標系に関して、作用する力とモーメントを計算した。その場合、合力の両成分ともゼロにならないことから、傾斜時の圧力中心を決定し得ることを示した。その結果を、 $\theta \rightarrow 0$ とすることで、圧力中心が、直立状態での水面下の図心、即ち、周知の浮心に一致することを、矩形断面⁽¹¹⁾に続いて、任意の横断面形状⁽¹²⁾について証明し、本技報で、その1⁽²⁾として紹介した。

この問題については、一色⁽¹³⁾や藪下⁽¹⁴⁾は、重力の作用方向を、鉛直方向から傾斜させることにより、「浮心=圧力中心」であることを示した。その後、藪下ら⁽¹⁵⁾は、浮体や重力の作用方向を傾斜させるのではなく、座標系のみを傾斜させることで、同様の結論が得られることを示した。一方、鈴木(勝)⁽¹⁶⁾、小松^{(17),(18)}、一色⁽¹⁹⁾、藪下ら⁽²⁰⁾が、種々のアプローチで、この問題に対して検討を加え、議論も深まってきた。

このような状況を止揚し、著者は、浮体の典型的な形状として、三角柱⁽²¹⁾や、傾斜しても水面下の形状が変化しない半没円柱⁽²²⁾について、更に、没水円柱⁽²³⁾についても、同様な手法で「浮心=圧力中心」であることを例証した。

最近、著者は任意形状の没水体に対して、Gauss の積分定理を用いて、「浮心=圧力中心」であることを証明した⁽²⁴⁾。加えて、任意形状の浮体についても、同様に Gauss の定理を用いることにより、その1⁽²⁾よりも容易に証明し得ることを、航海学会誌に公表した⁽²⁴⁾。

本技術資料では、上記の任意形状の没水体と浮体に Gauss の積分定理を用いた「浮心=圧力中心」の証明を、その3として舟艇協会の会員の皆様に、紹介させて頂く次第である。

2 没水体の圧力中心 C_p の位置決め

図1は、任意形状の物体が、頂部までの深度 f の位置に没水した状態で、その頂部回りに右舷側に θ だけ横傾斜した横断面を示す。

没水体の頂部に原点 o を置き、 ζ 軸を鉛直下向

きを取った空間固定座標系を $o-\eta\zeta$, 物体に固定して時計回りに θ だけ回転した座標系を $o-yz$ とする。

没水体表面 (y, z) での水深 Z_f は,

$$\begin{aligned} Z_f &= f + \zeta(y, z) \\ &= f + (z + y \tan \theta) \cos \theta \\ &= f + (z \cos \theta + y \sin \theta) \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

用いると,

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \gamma Z_f \\ &= p_0 + \gamma f + \gamma \zeta(y, z) \\ &\equiv p_0 + \gamma f + p'(y, z) \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

のように書ける。ここに, 右辺の p' は,

$$\begin{aligned} p'(y, z) &\equiv p - (p_0 + \gamma f) \\ &= \gamma \zeta(y, z) \\ &= \gamma (z \cos \theta + y \sin \theta) \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

で定義した, 没水体頂部 o での静水圧 $p_0 + \gamma f$ に対する相対圧である。図 1 に示す圧力は, この p' であり, 没水体表面に対して垂直な $-\mathbf{n}$ 方向に作用し, 没水体頂部では相対圧ゼロである。

このとき, 没水体表面に立てた, 外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} を,

$$\mathbf{n} = n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(4)$$

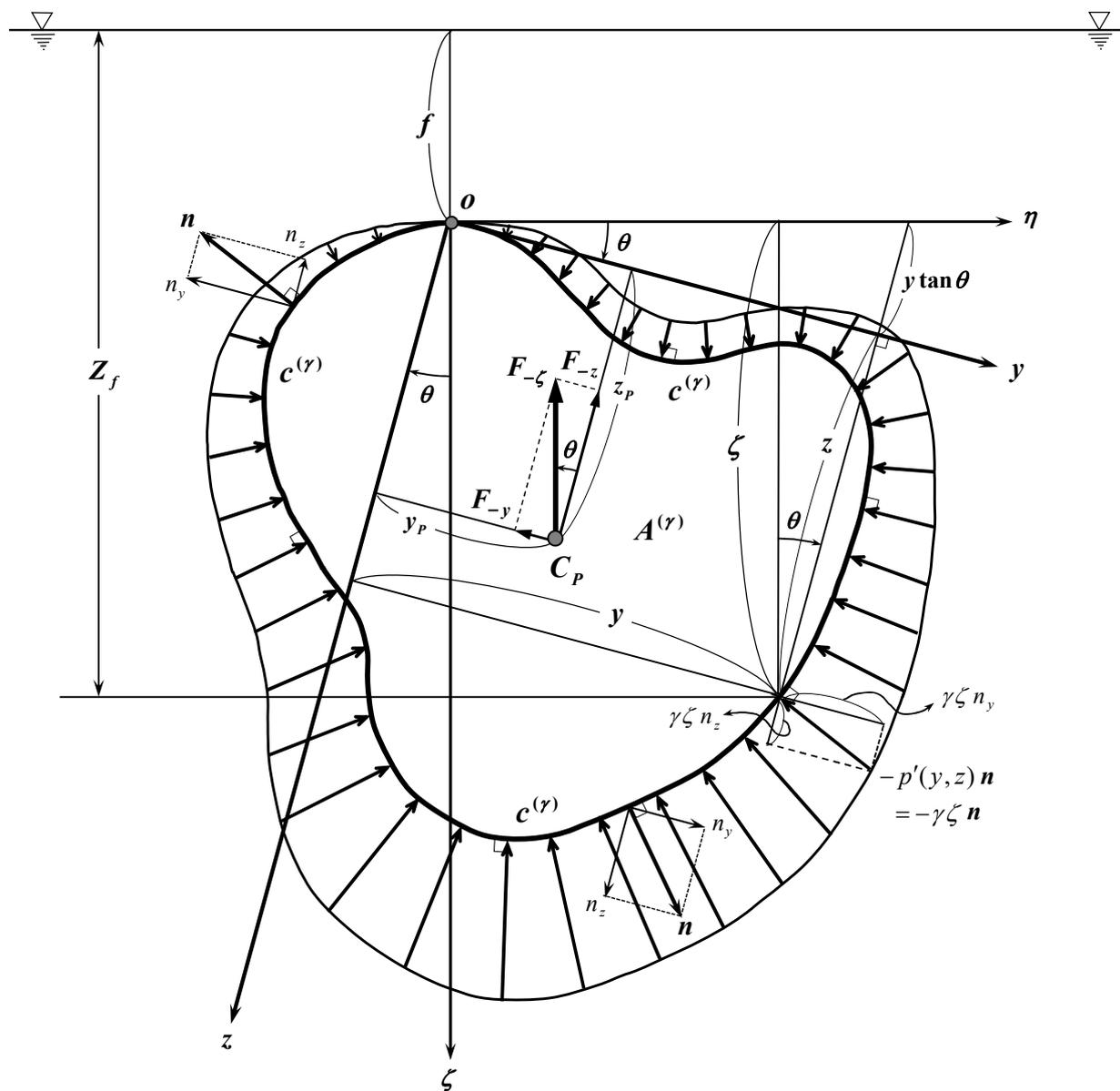


図 1 横傾斜した没水体に作用する静水圧 $p' = p - (p_0 + \gamma f)$ の分布と圧力中心

と書き, n_y, n_z は, それぞれ, 没水体固定の y, z 方向に対する方向余弦である。

2.1 没水体に働く静水圧による力の y 成分 F_{-y} と z 成分 F_{-z}

没水体表面に働く, 静水圧による力の $-y$ 方向成分 F_{-y} と $-z$ 方向成分 F_{-z} は, (2)式に示す p の y, z それぞれの成分を,

$$\left. \begin{aligned} F_{-y} &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f + p'(y, z)) n_y dl \\ F_{-z} &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f + p'(y, z)) n_z dl \end{aligned} \right\} \dots(5)$$

のように, 線素を dl として, 没水体表面の全周 $c^{(v)}$ に亙って, 圧力積分することにより求まる。

実際, 相対圧 p' に(3)式を用いることにより, F_{-y} は,

$$\begin{aligned} F_{-y} &= \oint_{c^{(v)}} \{ p_0 + \gamma f + \gamma(z \cos \theta + y \sin \theta) \} n_y dl \\ &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f) n_y dl \\ &\quad + \gamma \cos \theta \oint_{c^{(v)}} z n_y dl + \gamma \sin \theta \oint_{c^{(v)}} y n_y dl \end{aligned} \dots\dots(6)$$

によって, F_{-z} は,

$$\begin{aligned} F_{-z} &= \oint_{c^{(v)}} \{ p_0 + \gamma f + \gamma(y \sin \theta + z \cos \theta) \} n_z dl \\ &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f) n_z dl \\ &\quad + \gamma \sin \theta \oint_{c^{(v)}} y n_z dl + \gamma \cos \theta \oint_{c^{(v)}} z n_z dl \end{aligned} \dots\dots(7)$$

によって, 計算できる。

この周回積分に対して, 2次元 (yz 平面) Gauss の積分定理

$$\left. \begin{aligned} \oint_c u(y, z) n_y dl &= \iint_A \frac{\partial u}{\partial y} dA \\ \oint_c v(y, z) n_z dl &= \iint_A \frac{\partial v}{\partial z} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

を適用して, 面積分に変換すれば, (6)式の F_{-y} は,

$$\begin{aligned} F_{-y} &= \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial(p_0 + \gamma f)}{\partial y} dA \\ &\quad + \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial z}{\partial y} dA + \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial y}{\partial y} dA \\ &= \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} dA = \gamma A^{(v)} \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(9)$$

のように, (7)式の F_{-z} は,

$$\begin{aligned} F_{-z} &= \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial(p_0 + \gamma f)}{\partial z} dA \\ &\quad + \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial y}{\partial z} dA + \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial z}{\partial z} dA \\ &= \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} dA = \gamma A^{(v)} \cos \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

のように, それぞれ没水体の面積 $A^{(v)}$ と横傾斜角 θ によって定まることが分かる。これは, (9),(10)両式ともに, 第1項と第2項は, 被積分関数がゼロになって, 消失した結果である。

このことから, 没水体に働く力は, 大気圧 p_0 や没水深度 f に依らないことが分かる。

また, 次節(11)式の結果により, F_{-y}, F_{-z} は, それぞれ, 鉛直上方向に働く浮力 $F_{-\zeta}$ の y 成分と z 成分として得られている。

2.2 η 方向と ζ 方向の合力 $F_{-\eta}, F_{-\zeta}$

前節(9),(10)式で求めた F_{-y}, F_{-z} を用いて, 水平成分 ($-\eta$ 方向) の $F_{-\eta}$ と, 鉛直成分 ($-\zeta$ 方向) の $F_{-\zeta}$ を求めると,

$$\left. \begin{aligned} F_{-\eta} &= F_{-y} \cos \theta - F_{-z} \sin \theta \\ &= \gamma A^{(v)} (\sin \theta \cdot \cos \theta - \cos \theta \cdot \sin \theta) \\ &= 0 \\ F_{-\zeta} &= F_{-z} \cos \theta + F_{-y} \sin \theta \\ &= \gamma A^{(v)} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \gamma A^{(v)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

のように, 圧力積分による合力として, 水平成分 $F_{-\eta}$ は生じないことが分かる。

鉛直成分 $F_{-\zeta}$ は, 水の比重量 γ と没水体の横断面積 $A^{(v)}$ の積となっていて, Archimedes の原理⁽¹⁾が教える通り, 鉛直上向きに生じる浮力そのものである。

2.3 y, z 方向の圧力によるモーメント M_y, M_z

没水体表面に働く静水圧による, 原点 o に関する反時計回りのモーメント M_o は, その 1⁽²⁾と同様, 大串⁽²⁵⁾がローリングゲートの例題に用いた水理学の手法に基づけば, $-y$ 方向の圧力成分による時計回りモーメント M_y と, $-z$ 方向の圧力成分による反時計回りモーメント M_z を重畳することにより,

$$M_o = -M_y + M_z \quad \dots\dots\dots(12)$$

によって、求め得る。

ここに、 M_y, M_z は、それぞれ F_{-y}, F_{-z} を求める(5)式に、モーメントのレバーとして、 z 或いは y を乗じて積分することにより、

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f + p'(y,z)) z \cdot n_y d\ell \\ M_z &= \oint_{c^{(v)}} (p_0 + \gamma f + p'(y,z)) y \cdot n_z d\ell \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

によって計算できる。

実際、力 F_{-y}, F_{-z} の場合と同様に、相対圧 p' に(3)式を用いることにより、 M_y は、

$$\begin{aligned} M_y &= \oint_{c^{(v)}} \{ p_0 + \gamma f + \gamma(z \cos \theta + y \sin \theta) \} z n_y d\ell \\ &= (p_0 + \gamma f) \oint_{c^{(v)}} z n_y d\ell \\ &\quad + \gamma \cos \theta \oint_{c^{(v)}} z^2 n_y d\ell + \gamma \sin \theta \oint_{c^{(v)}} y z n_y d\ell \end{aligned} \quad \dots\dots(14)$$

によって、 M_z は、

$$\begin{aligned} M_z &= \oint_{c^{(v)}} \{ p_0 + \gamma f + \gamma(y \sin \theta + z \cos \theta) \} y n_z d\ell \\ &= (p_0 + \gamma f) \oint_{c^{(v)}} y n_z d\ell \\ &\quad + \gamma \sin \theta \oint_{c^{(v)}} y^2 n_z d\ell + \gamma \cos \theta \oint_{c^{(v)}} y z n_z d\ell \end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

によって、計算できる。この周回積分に対して、2.1節の力 F_{-y}, F_{-z} の場合と同様、(8)式の Gauss の積分定理を適用して、面積分に変換すれば、(14)式の M_y は、

$$\begin{aligned} M_y &= (p_0 + \gamma f) \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial z}{\partial y} dA \\ &\quad + \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial z^2}{\partial y} dA + \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial(yz)}{\partial y} dA \\ &= \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} z dA \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

のように、 y 軸に関する面積モーメントに比例して、(15)式の M_z は、

$$\begin{aligned} M_z &= (p_0 + \gamma f) \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial y}{\partial z} dA \\ &\quad + \gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial y^2}{\partial z} dA + \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} \frac{\partial(yz)}{\partial z} dA \\ &= \gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} y dA \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

のように、 z 軸に関する面積モーメントに比例して、定まることが分かる。これは、(17),(18)両式ともに、第1項と第2項は、被積分関数がゼロになって、消失した結果である。

2.4 没水体の圧力中心 C_p の位置決め

2.1節で求めた静水圧による力 F_{-y}, F_{-z} は、圧力中心 $C_p (y_p, z_p)$ に働くことになるから、2.3節で計算したモーメント M_y, M_z は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} M_y &= F_{-y} z_p \\ M_z &= F_{-z} y_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

のように書くことができ、(12)式の全モーメントは、

$$M_o = -F_{-y} z_p + F_{-z} y_p \quad \dots\dots\dots(19)$$

によって計算できる。このとき、 C_p 回りのモーメント M_{C_p} は、

$$M_{C_p} = -F_{-y} \times 0 + F_{-z} \times 0 = 0 \quad \dots\dots(20)$$

のようにゼロとなって、 C_p が静水圧の圧力中心であることを示している。

この圧力中心 C_p の座標 (y_p, z_p) は、(18)式によって定め得る。 y 座標 y_p は、 F_{-z} と M_z に、それぞれ(10),(17)式を用いて、

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{M_z}{F_{-z}} = \frac{\gamma \cos \theta \iint_{A^{(v)}} y dA}{\gamma A^{(v)} \cos \theta} \\ &= \frac{1}{A^{(v)}} \iint_{A^{(v)}} y dA (= y_G) \quad \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

のように、 z 座標 z_p は、 F_{-y} と M_y に、それぞれ(9),(16)式を用いて、

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{M_y}{F_{-y}} = \frac{\gamma \sin \theta \iint_{A^{(v)}} z dA}{\gamma A^{(v)} \sin \theta} \\ &= \frac{1}{A^{(v)}} \iint_{A^{(v)}} z dA (= z_G) \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

のように決定され、 y_p は z 軸に関する面積モーメントを、 z_p は y 軸に関する面積モーメントを、それぞれ没水体の面積 $A^{(v)}$ で除した形で、図心の座標 (y_G, z_G) として得られている。式中、 y_p, z_p 共に分母・分子で、比重量 γ と傾斜角 θ が相殺されて、結果は θ に依らないことから、没水体は傾斜しても、常に圧力中心 (y_p, z_p) は、その図心位置

(y_G, z_G) , 即ち, 周知の浮心に一致することを示している。

特に, z_p は, (22)式に示す通り, 傾斜角 $\theta \rightarrow 0$ でのゼロ因子 $\sin \theta$ が, 分母と分子で相殺することで得られている。当初から, $\theta = 0$ として直立状態で計算すれば, 分母の F_{-y} も分子の M_y も, 共に平衡してゼロとなるから不定形となって, z_p を確定できない。これが, 没水体の場合も, 浮体の場合 (2), (11), (12), (21), (22) と同様, 横傾斜させることで, z 方向の圧力中心位置を $z_p = z_G$ として, 確定できた所以である。

これに対し, (21)式の y_p は, $\theta \rightarrow 0$ としても, 分母の F_{-z} は浮力の余弦成分として有限値を取るから, 当初から直立状態で計算しても, $y_p = y_G$ として, 求まる訳である。

3 任意形状の浮体に対する別証明

前章で没水体に用いた Gauss の積分定理を, その 1⁽²⁾ で証明した任意形状の浮体に対しても適用することで, 別証明を展開する。

図 2 は, 任意形状の浮体が, 右舷側に θ だけ横傾斜した横断面を示す。

静水面中央に原点 o を置き, 浮体に固定して傾斜した座標系を $o-yz$, 空間に固定した座標系を $o-\eta\zeta$ とする。また, 浮体表面に立てた, 外向きの単位法線ベクトルを, (4)式と同様, $\mathbf{n} = n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ とし, n_y, n_z は, それぞれ, 浮体固定の y, z 方向に対する方向余弦である。

図中, 大気圧を破線, 静水圧を実線で示していて, 全て, 浮体表面に対して垂直な $-\mathbf{n}$ 方向に作用する。

浮水表面 (y, z) での水深 ζ は, 図 2 より,

$$\begin{aligned} \zeta(y, z) &= (z + y \tan \theta) \cos \theta \\ &= z \cos \theta + y \sin \theta \quad \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

であるから, 第 2 章と同様, 大気圧を p_0 , 水の比重量を γ と書けば, 静水圧 p は,

$$p(y, z) = p_0 + \gamma \zeta(y, z) \quad \cdots \cdots (24)$$

で定まる。

3.1 浮体に働く静水圧による力の

y 成分 F_{-y} と z 成分 F_{-z}

浮体表面に働く力の $-y$ 方向成分 F_{-y} と $-z$ 方向成分 F_{-z} は, それぞれ (24)式の静水圧 p の y 及び z 成分を, 図 2 に記すように, 浮体の空中部の経路を $c^{(0)}$, 水中部の経路を $c^{(r)}$ と書いて, 圧力積分することにより, F_{-y} は,

$$\begin{aligned} F_{-y} &= \int_{c^{(0)}} p_0 n_y d\ell + \int_{c^{(r)}} (p_0 + \gamma \zeta) n_y d\ell \\ &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_y d\ell + \gamma \int_{c^{(r)}} \zeta n_y d\ell \quad \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

によつて, F_{-z} は,

$$\begin{aligned} F_{-z} &= \int_{c^{(0)}} p_0 n_z d\ell + \int_{c^{(r)}} (p_0 + \gamma \zeta) n_z d\ell \\ &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_z d\ell + \gamma \int_{c^{(r)}} \zeta n_z d\ell \quad \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

によつて, それぞれ p_0 に関する浮体全周 $c^{(0)} + c^{(r)}$ に亙る周回積分と, ζ に関する水面下の浮体表面 $c^{(r)}$ での線積分の和で求まる。

ここに, 静水面 (η 軸) 上では $\zeta = 0$ だから, 第 2 項に静水面上の経路 $c^{(WL)}$ に関する積分項を追加しても等号関係は崩れず, その結果として, 水面下 $c^{(r)} + c^{(WL)}$ の周回積分として表記できるから, F_{-y} については,

$$\begin{aligned} F_{-y} &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_y d\ell \\ &\quad + \gamma \int_{c^{(r)}} \zeta n_y d\ell + \gamma \int_{c^{(WL)}} \zeta n_y d\ell \\ &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_y d\ell + \gamma \oint_{c^{(r)}+c^{(WL)}} \zeta n_y d\ell \quad (27) \end{aligned}$$

のように, F_{-z} については,

$$\begin{aligned} F_{-z} &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_z d\ell \\ &\quad + \gamma \int_{c^{(r)}} \zeta n_z d\ell + \gamma \int_{c^{(WL)}} \zeta n_z d\ell \\ &= \oint_{c^{(0)}+c^{(r)}} p_0 n_z d\ell + \gamma \oint_{c^{(r)}+c^{(WL)}} \zeta n_z d\ell \quad (28) \end{aligned}$$

のように, それぞれ 2 経路の周回積分の和として, 書き表わすことができる。

結果, それぞれの周回積分に対して, 第 2 章の没水体の場合と同様, (8)式の Gauss の積分定理を適用できて, 浮体の空中部の面積を $A^{(0)}$, 水中部の面積を $A^{(r)}$ と記せば, (27)式の F_{-y} は,

$$\begin{aligned}
 F_{-y} &= \iint_{A^{(0)}+A^{(\gamma)}} \frac{\partial p_0}{\partial y} dA + \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dA \\
 &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dA \quad \dots\dots\dots(29)
 \end{aligned}$$

のように、(28)式の F_{-z} は、

$$\begin{aligned}
 F_{-z} &= \iint_{A^{(0)}+A^{(\gamma)}} \frac{\partial p_0}{\partial z} dA + \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dA \\
 &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dA \quad \dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

のように、水中部の面積 $A^{(\gamma)}$ に関する面積分に変換できる。これは、式中それぞれ第1項の p_0 に関する積分は、被積分関数がゼロとなって、消失した結果である。

更に、水深 ζ に関して (23)式を用いれば、(29)式

の F_{-y} は、

$$\begin{aligned}
 F_{-y} &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(z \cos \theta + y \sin \theta)}{\partial y} dA \\
 &= \gamma \sin \theta \iint_{A^{(\gamma)}} dA = \gamma A^{(\gamma)} \sin \theta \quad \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

のように、(30)式の F_{-z} は、

$$\begin{aligned}
 F_{-z} &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(y \sin \theta + z \cos \theta)}{\partial z} dA \\
 &= \gamma \cos \theta \iint_{A^{(\gamma)}} dA = \gamma A^{(\gamma)} \cos \theta \quad \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

のように計算でき、浮体の水面下の面積 $A^{(\gamma)}$ と横傾斜角 θ によって定まり、大気圧 p_0 には依らないことが分かる。

また、次節(33)式の結果により、 F_{-y}, F_{-z} は、そ

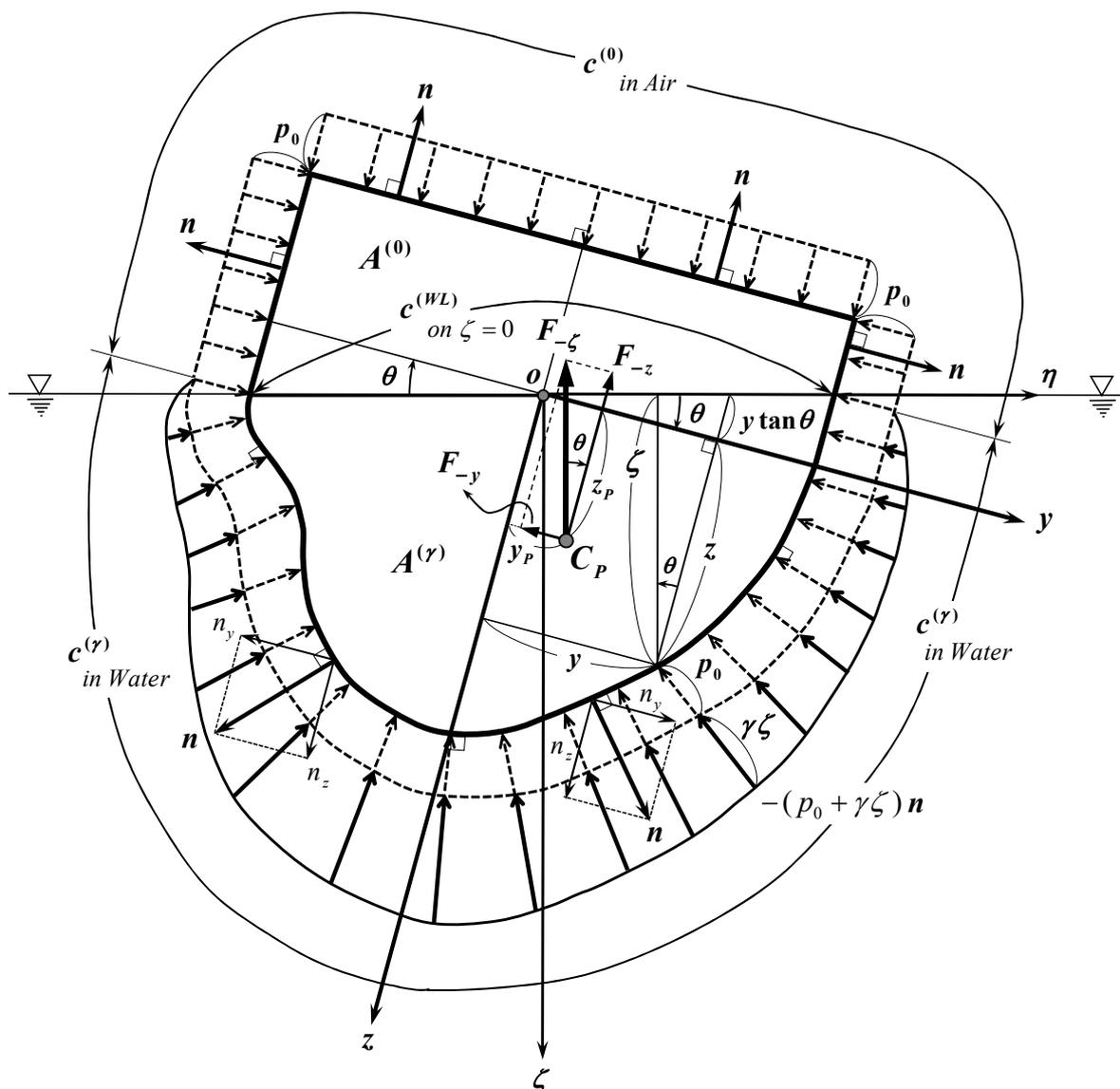


図2 横傾斜した浮体に作用する静水圧の分布と圧力中心

れぞれ、鉛直上向きに働く浮力 $F_{-\zeta}$ の y 成分と z 成分として得られている。

3.2 η 方向と ζ 方向の合力 $F_{-\eta}$, $F_{-\zeta}$

前節(31), (32)式で求めた F_{-y} , F_{-z} を、水平成分 ($-\eta$ 方向) $F_{-\eta}$ と、鉛直成分 ($-\zeta$ 方向) $F_{-\zeta}$ に変換してみると、

$$\left. \begin{aligned} F_{-\eta} &= F_{-y} \cos \theta - F_{-z} \sin \theta \\ &= \gamma A^{(\gamma)} (\sin \theta \cdot \cos \theta - \cos \theta \cdot \sin \theta) = 0 \\ F_{-\zeta} &= F_{-z} \cos \theta + F_{-y} \sin \theta \\ &= \gamma A^{(\gamma)} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \gamma A^{(\gamma)} \end{aligned} \right\} (33)$$

となる。静水圧の圧力積分による合力として、浮体が左右非対称な場合でも、水平成分 $F_{-\eta}$ は生じず、鉛直成分 $F_{-\zeta}$ は、水の比重量 γ と浮体の水面下の横断面積 $A^{(\gamma)}$ の積となっていて、Archimedes の原理⁽¹⁾が教える通り、鉛直上向きに生じる浮力そのものであることは、(11)式の没水体の場合と同様な状況である。

3.3 y, z 方向の圧力

によるモーメント M_y, M_z

浮体表面に働く静水圧による、原点 o に関する反時計回りのモーメント M_o は、2.3 節の没水体の場合と同様、 $-y$ 方向の圧力成分による時計回りモーメント M_y と、 $-z$ 方向の圧力成分による反時計回りモーメント M_z の和として、

$$M_o = -M_y + M_z \quad \dots\dots\dots(34)$$

によって、計算することができる。

M_y, M_z は、それぞれ、(25), (26)式にモーメントのレバーとして、 z 或いは y を乗じて積分することにより、

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \int_{c^{(0)}} p_0 z n_y dl + \int_{c^{(\gamma)}} (p_0 + \gamma \zeta) z \cdot n_y dl \\ M_z &= \int_{c^{(0)}} p_0 y n_z dl + \int_{c^{(\gamma)}} (p_0 + \gamma \zeta) y \cdot n_z dl \end{aligned} \right\} (35)$$

によって、求めることができる。

ここに、 F_{-y}, F_{-z} のときと同様に、 p_0 に関する $c^{(0)}$ と $c^{(\gamma)}$ の径路を纏め、積分値がゼロとなる ζ に関する静水面上の経路 $c^{(W)}$ の項を追加することにより、 M_y については、

$$\begin{aligned} M_y &= \oint_{c^{(0)+c^{(\gamma)}}} p_0 z n_y dl \\ &\quad + \gamma \int_{c^{(\gamma)}} \zeta z n_y dl + \gamma \int_{c^{(W)}} \zeta z n_y dl \\ &= p_0 \oint_{c^{(0)+c^{(\gamma)}}} z n_y dl + \gamma \oint_{c^{(\gamma)+c^{(W)}}} \zeta z n_y dl \\ &\quad \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

のように、 M_z については、

$$\begin{aligned} M_z &= \oint_{c^{(0)+c^{(\gamma)}}} p_0 y n_z dl \\ &\quad + \gamma \int_{c^{(\gamma)}} \zeta y n_z dl + \gamma \int_{c^{(W)}} \zeta y n_z dl \\ &= p_0 \oint_{c^{(0)+c^{(\gamma)}}} y n_z dl + \gamma \oint_{c^{(\gamma)+c^{(W)}}} \zeta y n_z dl \\ &\quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

のように、それぞれ 2 経路の周回積分の和として、表記できる。

この周回積分に対して、3.1 節の F_{-y}, F_{-z} の場合と同様、(8)式の Gauss の積分定理を適用して、面積分に変換し、水深 ζ に関して (23)式を用いれば、(36)式の M_y は、

$$\begin{aligned} M_y &= p_0 \iint_{A^{(0)+A^{(\gamma)}}} \frac{\partial z}{\partial y} dA + \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(\zeta z)}{\partial y} dA \\ &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(z^2 \cos \theta + yz \sin \theta)}{\partial y} dA \\ &= \gamma \sin \theta \iint_{A^{(\gamma)}} z dA \quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

のように、(37)式の M_z は、

$$\begin{aligned} M_z &= p_0 \iint_{A^{(0)+A^{(\gamma)}}} \frac{\partial y}{\partial z} dA + \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(\zeta y)}{\partial z} dA \\ &= \gamma \iint_{A^{(\gamma)}} \frac{\partial(y^2 \sin \theta + yz \cos \theta)}{\partial z} dA \\ &= \gamma \cos \theta \iint_{A^{(\gamma)}} y dA \quad \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

のように、それぞれ浮体の水中部面積 $A^{(\gamma)}$ の y 軸、或は、 z 軸に関する面積モーメントに比例して得られる。これは、両式中で、第 1 項の p_0 と $A^{(\gamma)}$ に関する第 1 項の面積分が、消失した結果である。

3.4 浮体の圧力中心 C_p の位置決め

圧力中心 C_p の位置決め (y_p, z_p) をするには、2.4 節の没水体の場合と同様に、 y 座標 y_p は、 z 方向の圧力による合力 F_{-z} とモーメント M_z により、(32), (39)式を用いて、

$$y_p = \frac{M_z}{F_{-z}} = \frac{\gamma \cos \theta \iint_{A^{(\gamma)}} y dA}{\gamma A^{(\gamma)} \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{A^{(\gamma)}} \iint_{A^{(\gamma)}} y dA (= y_G) \quad \cdots \cdots (40)$$

のように、 z 座標 z_p は、 y 方向の圧力による F_{-y} と M_y により、(31),(38)式を用いて、

$$z_p = \frac{M_y}{F_{-y}} = \frac{\gamma \sin \theta \iint_{A^{(\gamma)}} z dA}{\gamma A^{(\gamma)} \sin \theta}$$

$$= \frac{1}{A^{(\gamma)}} \iint_{A^{(\gamma)}} z dA (= z_G) \quad \cdots \cdots (41)$$

のように、決定される。この結果、 y_p は浮体の水面下の面積 $A^{(\gamma)}$ の z 軸に関する面積モーメントを、 z_p は $A^{(\gamma)}$ の y 軸に関する面積モーメントを、それぞれ面積 $A^{(\gamma)}$ で除した形で得られている。このことは、傾斜状態の浮体の圧力中心 (y_p, z_p) が、明らかに、その水面下面積 $A^{(\gamma)}$ の図心位置 (y_G, z_G)、即ち、周知の浮心に一致することを示している。

特に、(41)式の z_p については、2.4 節の文末でも詳述したように、浮体を θ だけ傾斜させることによって求め得たものであるが、この帰結を、その 1⁽²⁾ よりも容易に導き得たのは、浮体に固定して傾斜した $o-yz$ 座標系に対して、Gauss の積分定理を適用したことによる。

4 結 論

本稿では、任意形状の没水体について、その 1⁽²⁾ の浮体と同様に、物体を横傾斜させる手法を展開し、圧力積分には Gauss の積分定理を適用することによって、静水圧の圧力中心が、周知の浮心位置に一致することを証明した。

加えて、任意形状の浮体についても、同様に Gauss の定理を適用することにより、その 1⁽²⁾ よりも容易に「浮心=圧力中心」であることを、証明し得ることを示した。

謝 辞

本稿を閉じるに臨み、著者が大学院の博士後期課程で、ご指導して頂いた松村 清重 先生^{(26),(27)} に、深甚なる感謝の意を表します。

当時「論文を書くというのは、俺にとって真剣勝負だ!」と仰った先生の言葉が、30年以上も経った今頃になって、漸く理解できるようになってきたからです。

附 録

第3章で示した任意形状の浮体の最も単純化した例として、矩形断面の浮体を横傾斜させて「浮心=圧力中心」を証明する内容⁽¹¹⁾を、著者の勤務校の「船体復原論」で、船舶工学コース⁽²⁸⁾の2年生に、講義しています。

昨今の遠隔講義の気運で、その様子を前半⁽²⁹⁾と後半⁽³⁰⁾の2回に分けてビデオで撮影して、オンデマンド教材を作成し、YouTube 動画としてアップロードしていますので、興味のある方は、ご覧になってみて下さい。

参考文献

- (1) ARCHIMEDES : The Works of Archimedes, On Floating Bodies, Book I & Book II, Edited and Translated by T. L. HEATH, Cambridge University Press, pp.253~300, 1897.
- (2) 堀 勉 : 「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開 — その1 : 「浮心=圧力中心」の証明 —, 舟艇技報, 第135号, pp.1~10, 2018年9月.
- (3) 小松 正彦 : 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察, 舟艇技報, 第93号, pp.21~25, 2007年12月.
- (4) 瀬戸 秀幸 : 「浮心」考 — 小松 : 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察の再検討 —, 第14回推進性能・運動性能合同研究会, 2010年.
- (5) 瀬戸 秀幸 : 浮力の作用中心に関する一考察, 日本船舶海洋工学会 講演会論文集, 第12号, pp.529~532, 2011年5月.
- (6) 鈴木 勝雄 : 神説「浮心の法則」, 2011年1月.
- (7) 芳村 康男, 安川 宏紀 : 浮力の作用中心と復原性の再考, 第16回 推進性能・運動性能合同研究会, 2011年.
- (8) 小松 正彦 : 座標変換による浮力の作用中心に関する考察, 第19回 推進性能・運動性能合同研究会, 2012年.

- (9) 渡辺 倫堂：船体周りの圧力分布と浮心の関係に関する研究，防衛大学校 機械システム工学科 船舶工学講座 卒業論文，(指導) 藪下 和樹，岡畑 豪，pp.1～25，2013年3月。
- (10) 慎 燦益：造船幾何学 — 造船設計の基礎知識 —，第4章 排水量等計算と曲線図，4.2 アルキメデスの原理，海文堂，pp.125～133，2013年2月（初版）。
- (11) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — 浮心=圧力中心の証明 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第203号，pp.88～92，2018年1月。
- (12) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その2：任意の断面形状の場合 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第205号，pp.28～34，2018年7月。
- (13) 一色 浩：Pressure Center，2018年3月。
- (14) 藪下 和樹：船舶の復原及び推進性能(2018年度版)，第4章 浮力と圧力分布の関係，防衛大学校 機械システム工学科 テキスト，pp.81～90，2018年4月。
- (15) 藪下 和樹，日比 茂幸，岡畑 豪：物体周りの圧力分布による浮心位置の同定，第10回 推進・運動性能 研究会，pp.1～14，2018年6月。
- (16) 鈴木 勝雄：見かけの浮心について — 堀論文⁽¹⁾に関連して —，2018年4月。
- (17) 小松 正彦：浮体に働く浮力の作用中心に関する考察(続報)，舟艇技報，第136号，pp.12～18，2018年12月。
- (18) 小松 正彦：圧力分布に着目した浮体の「浮力の作用中心」，第13回 推進・運動性能 研究会，pp.1～22，2019年6月。
- (19) 一色 浩：浮心について，日本船舶海洋工学会講演会論文集，第28号，No.2019S-OS2-9，pp.131～132，2019年5月。
- (20) 藪下 和樹，日比 茂幸，岡畑 豪：浮心位置の同定および圧力分布との関係，日本船舶海洋工学会講演会論文集，第30号，No.2020S-GS12-16，pp.629～636，2020年5月。
- (21) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その4：三角柱に対する証明 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第213号，pp.50～58，2020年7月。
- (22) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その3：半没円柱に対する証明 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第208号，pp.60～68，2019年4月。
- (23) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その5：没水円柱に対する証明 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第214号，pp.62～67，2020年10月。
- (24) 堀 勉：静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その6：任意形状の没水体と浮体に対する証明 —，日本航海学会誌 NAVIGATION，第215号，pp.70～78，2021年1月。
- (25) 大串 雅信：理論 船舶工学(上巻)，1.3 浮力の例題，海文堂，pp.4～5，1971年6月（初版）。
- (26) 松村 清重：流体力学における摂動法(基礎編)，関西造船協会誌，第197号「解説」，pp.127～139，1985年6月。
- (27) 松村 清重：流体力学における摂動法(応用編)，関西造船協会誌，第201号「解説」，pp.109～126，1986年6月。
- (28) 堀 勉：長崎総合科学大学 工学部 工学科 船舶工学コース，日本航海学会誌 NAVIGATION，第215号「教育・研究機関紹介」，pp.38～45，2021年1月。
- (29) 堀 勉：「浮心=圧力中心」を証明する講義動画(前半：約80分)，<https://youtu.be/Wd7jKMXSqhc>，2021年1月7日。
- (30) 堀 勉：「浮心=圧力中心」を証明する講義動画(後半：約90分)，<https://youtu.be/bniJ6-9vJPI>，2021年1月14日。

目 次

舟艇技報 (Boat Engineering) No.146 June

[技術資料]

プロペラのキャビテーション

その3: キャビテーションによるスラスト低下(16)

— 非線型スーパーキャビティ流れ理論—

元海上技術安全研究所 右近 良孝

海上技術安全研究所 川並 康剛 1

米国高速巡視艇の性能分析

— (1) 主要目の分析 —

舟艇協会技術委員 佐久間 俊 9

船舶設計開発物語 その2

近代型自動帆船の開発

工学博士、技術士(船舶・海洋部門) 鷺尾 祐秀 20

舶用機関の排ガス規制変遷と将来

IHI 原動機 技術センター 城野 義巳 26

「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開

—その3 任意形状の没水体と浮体に対する「浮心=圧力中心」の証明—

長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授 堀 勉 . . . 35

小型船舶の電気設備とメンテナンス (8)

NMEA2000 の信号を携帯端末でみる

マリンサービス児嶋 東京事務所 羽澤 正 44

[マリタイム・レポート]

シンガポール港初の15M型ハイブリッド高速電気推進艇

「Penguin Tenaga」(ペンギン・テナガ)

BOS マリン&オフショア エンジニアリング 山本琴治 51

[コラム]

Click in the “船外機情報村” —その13

船外機情報村入口 主宰 吉谷 瑞男 56

[舟艇協会の活動] 60