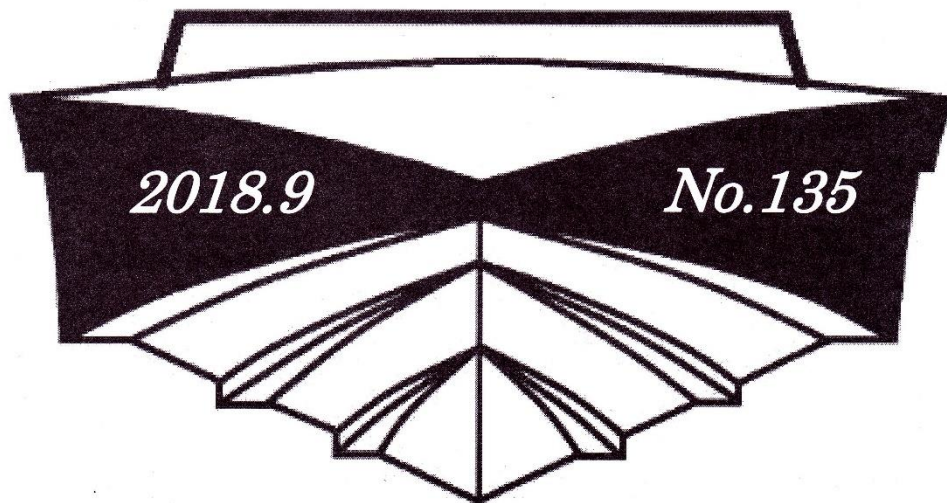


ISSN 1340-7341

# 舟艇技報

「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開  
— その1 : 「浮心=圧力中心」の証明 —

長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授  
堀 勉



## Boat Engineering

一般財団法人 舟艇協会

— 技術資料 —

# 「浮体静力学」の基礎理論に対する新展開

## — その1 : 「浮心=圧力中心」の証明 —

長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授  
堀 勉

### 1 序論

船に作用する浮力の中心「浮心」は、水面下の体積（排水体積）を水で置き換えた重心（即ち、水面下の幾何学的形状の体積中心）に等しいことは、造船学上、否、物理学上の周知の事実である。

Archimedes の原理<sup>(1)</sup>が教える浮力は、静水圧の圧力積分によって明快に求められるが、浮心位置については、物理学<sup>(2),(3),(4)</sup>や水理学<sup>(5),(6)</sup>、造船学<sup>(7)~(14)</sup>や航海力学<sup>(15),(16),(17)</sup>等、どの教科書にも、水面下の体積を水で置き換えた重心位置であると、記述されている。

浮力が、静水圧の積分値として求まるのだから、その浮心位置についても、静水圧を浮体表面で積分することで求め得ると考えられるが、そのような説明は、著者が文献調査する限り、見付からない。

そんな状況の中、本技法上で、小松<sup>(18)</sup>によって、周知の浮心は、圧力中心ではない？との問題提起が成された。小松が導いた、大気圧を省いた静水圧による圧力中心の結果は、矩形断面の場合、底面の中央に位置するというものである。

この「浮心≠圧力中心？」の疑問は、著者を含めた造船学の研究者の間で、屢々議論になる問題であり、最近でも、日本船舶海洋工学会の推進性能・運動性能合同研究会等で、瀬戸<sup>(19),(20)</sup>、鈴木(勝)<sup>(21)</sup>、小松<sup>(22)</sup>、藪下<sup>(23)</sup>らによって、活発に議論が成された。一方、復原性の観点からは、浮心位置が水面下の幾何学的形状の体積中心である事実は間違いないことである為、この議

論に対する明確な答えが出ないまま、現在に至っている状況である。

上述のような状況に鑑み、著者<sup>(24)</sup>は、鉛直方向の圧力中心を定められない原因は、直立状態では、水平方向の力が平衡してゼロになる為であると考え、その打開策として、浮体を $\theta$ だけ横傾斜させた状態で、静水圧を正しく圧力積分して、力とモーメントを計算することにより、傾斜時の圧力中心の位置を決定した。その結果を、 $\theta \rightarrow 0$ とすることで、圧力中心が、周知の浮心位置、即ち、水面下の図心に位置することを証明した。

その後、一色<sup>(25)</sup>は、仮想的に微弱な水平方向の重力加速度を作用させることにより、ガウスの積分定理を用いて、圧力中心を求めた。同様な考え方で、藪下<sup>(26)</sup>も、重力の作用方向を、鉛直方向から傾斜させることにより、圧力の表面積分を体積分に変換することにより、その圧力中心を定め、傾斜をゼロにすることで、それが、周知の浮心位置に等しいことを示した。

一方、著者<sup>(27)</sup>も、上述の矩形断面に対して展開した手法を拡張することにより、任意の横断面形状に対して「浮心=圧力中心」であることを、静水圧の圧力積分の観点から証明した。

本技術資料では、著者が航海学会誌に公表した、矩形断面<sup>(24)</sup>の場合と、それを任意の横断面形状<sup>(27)</sup>に拡張して示した「浮心=圧力中心」の証明を、舟艇協会の会員の皆様に、併せて紹介させて戴く次第である。

## 2 矩形断面の圧力中心 $C_P$ の位置決め<sup>(24)</sup>

図1は、幅  $2b$ 、深さ  $f+h$  (吃水  $f$ 、乾舷  $h$ ) の2次元矩形断面が、右舷側に  $\theta$  だけ横傾斜した場合を示す。底面中央に原点  $o$  を置き、浮体に固定した座標系を  $o-\xi\eta$ 、空間に固定した座標系を  $o-xy$  とする。

図中、大気圧を破線、静水圧を実線、それぞれの圧力を細線、力を太線のベクトルで示している。全て、浮体表面に対して垂直方向に作用する。

### 2.1 浮体表面に働く圧力による力

横傾斜角  $\theta$  によって、図1に示す左舷底面  $L$  点、右舷底面  $R$  点での、水面下の深度  $Z_L, Z_R$  は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} Z_L &= (f - b \tan \theta) \cos \theta \\ Z_R &= (f + b \tan \theta) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

である。

左舷 (Left), 右舷 (Right) に働く力  $P_{Left}, P_{Right}$

は、それぞれ舷側全体に働く一様分布の大気圧による  $P_{Left}^{(0)}, P_{Right}^{(0)}$  と、没水部に働く三角形分布の静水圧による  $P_{Left}^{(\gamma)}, P_{Right}^{(\gamma)}$  の和で求まるから、大気圧を  $p_0$ 、水の比重量を  $\gamma$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} P_{Left} &= P_{Left}^{(0)} + P_{Left}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma Z_L (f - b \tan \theta) \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma (f - b \tan \theta)^2 \cos \theta \\ P_{Right} &= P_{Right}^{(0)} + P_{Right}^{(\gamma)} \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma Z_R (f + b \tan \theta) \\ &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma (f + b \tan \theta)^2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

となる。甲板 (Upper) に働く力  $P_{Upper}$  は、大気圧による  $P_{Upper}^{(0)}$  のみで、底面 (Lower) に働く力  $P_{Lower}$  は、大気圧による  $P_{Lower}^{(0)}$  と、台形分布の静水圧による  $P_{Lower}^{(\gamma)}$  の和で求まるから、それぞれ、

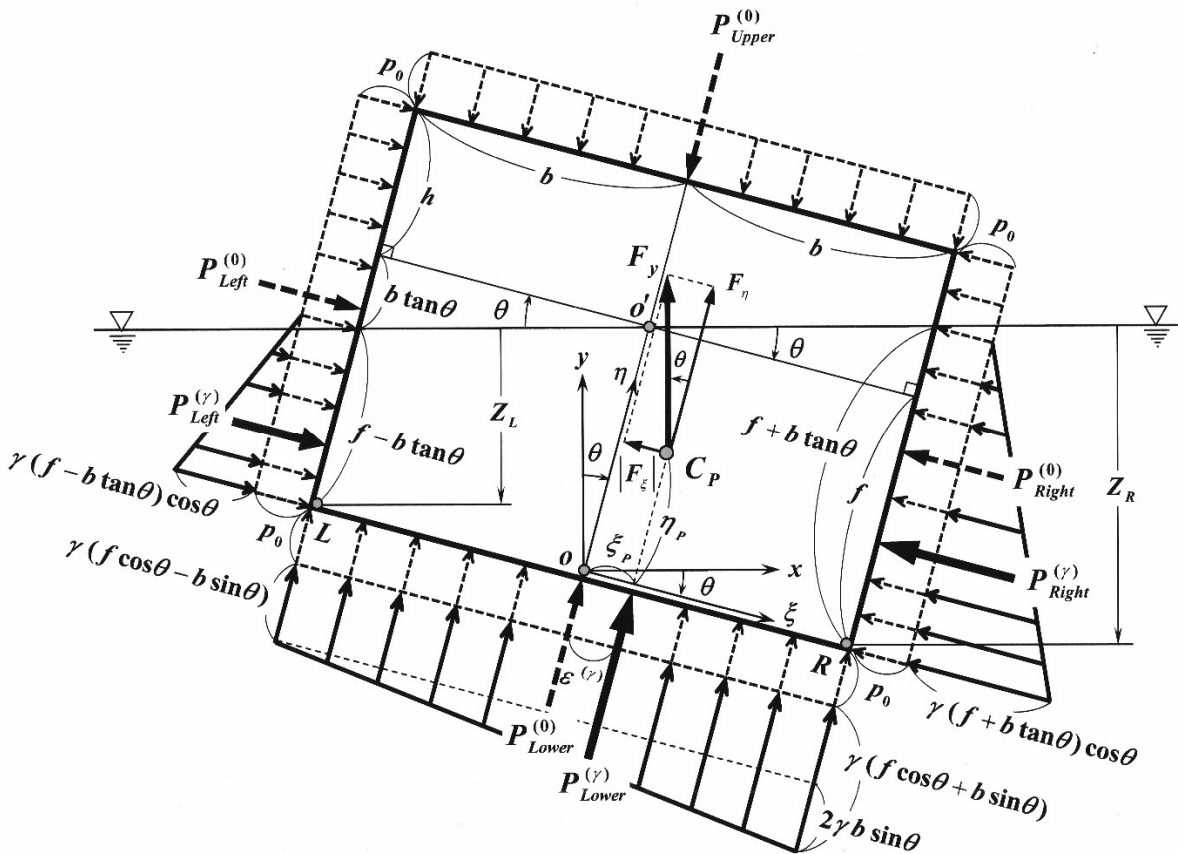


図1 横傾斜した矩形断面に作用する静水圧の分布と圧力中心<sup>(24)</sup>

$$\left. \begin{aligned} P_{Upper} &= P_{Upper}^{(0)} \\ &= 2p_0b \\ P_{Lower} &= P_{Lower}^{(0)} + P_{Lower}^{(\gamma)} \\ &= 2p_0b + \frac{\gamma Z_L + \gamma Z_R}{2} \cdot 2b \\ &= 2p_0b + 2\gamma fb \cos\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

となる。

**2.2 ξ方向とη方向の合力  $F_\xi, F_\eta$**

浮体固定のξ, η方向に働く合力  $F_\xi, F_\eta$  は、(2)式中の  $P_{Left}, P_{Right}$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} F_\xi &= P_{Left} - P_{Right} = P_{Left}^{(\gamma)} - P_{Right}^{(\gamma)} \\ &= -2\gamma fb \sin\theta = -|F_\xi| \\ F_\eta &= P_{Lower} - P_{Upper} = P_{Lower}^{(\gamma)} \\ &= 2\gamma fb \cos\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

のように、共に大気圧  $p_0$  は相殺して求まり、 $F_\xi$  は左向き、 $F_\eta$  は上向きであることが分かる。

**2.3 x方向とy方向の合力  $F_x, F_y$**

前節で求めた  $F_\xi, F_\eta$  を用いて、水平成分の  $F_x$  と、鉛直成分の  $F_y$  を求めてみると、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_\eta \sin\theta - |F_\xi| \cos\theta \\ &= 2\gamma fb (\cos\theta \sin\theta - \sin\theta \cos\theta) = 0 \\ F_y &= F_\eta \cos\theta + |F_\xi| \sin\theta \\ &= 2\gamma fb (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2\gamma fb \end{aligned} \right\} (5)$$

のように、横傾斜して左右非対称な場合でも、圧力積分による合力として、水平成分  $F_x$  は生じないことが分かる。鉛直成分  $F_y$  については、

$$\begin{aligned} F_y &= \gamma \cdot (2b \cdot f) \\ &= \gamma \cdot (\text{水面下の矩形の面積}) = \text{浮力} \dots(6) \end{aligned}$$

のように書いて、Archimedesの原理が教える通りの浮力である。

**2.4 o点回りのモーメントの計算**

ξ方向に働く力  $P_{Right}^{(0)}, P_{Right}^{(\gamma)}$  と  $P_{Left}^{(0)}, P_{Left}^{(\gamma)}$  による、o点を中心とする反時計回りのモーメント  $M_\xi$  は(28)、(2)式を用いて、

$$\begin{aligned} M_\xi &= P_{Right}^{(0)} \cdot \frac{f+h}{2} + P_{Right}^{(\gamma)} \cdot \frac{f+b \tan\theta}{3} \\ &\quad - P_{Left}^{(0)} \cdot \frac{f+h}{2} - P_{Left}^{(\gamma)} \cdot \frac{f-b \tan\theta}{3} \\ &= \gamma b \sin\theta (f^2 + \frac{b^2}{3} \tan^2\theta) \dots\dots(7) \end{aligned}$$

のように、 $p_0$ に関する項は相殺されて、計算される。

o点から  $P_{Lower}^{(\gamma)}$  の着点までの距離  $\varepsilon^{(\gamma)}$  は、台形分布を一様分布と三角分布の重畳で考えれば、モーメントに寄与するのは、三角分布のみであるから、(3)式を用いて、

$$\varepsilon^{(\gamma)} = \frac{2\gamma b^2 \sin\theta \cdot \left(b - \frac{2b}{3}\right)}{P_{Lower}^{(\gamma)}} = \frac{b^2}{3f} \tan\theta \dots(8)$$

のように求まる。

η方向に働く力  $P_{Lower}^{(0)}, P_{Lower}^{(\gamma)}$  と  $P_{Upper}^{(0)}$  によるo点回りのモーメント  $M_\eta$  も(28)、やはり、

$$\begin{aligned} M_\eta &= P_{Lower}^{(0)} \times 0 + P_{Lower}^{(\gamma)} \cdot \varepsilon^{(\gamma)} - P_{Upper}^{(0)} \times 0 \\ &= P_{Lower}^{(\gamma)} \cdot \varepsilon^{(\gamma)} = \frac{2}{3} \gamma b^3 \sin\theta \dots\dots(9) \end{aligned}$$

のように、大気圧  $p_0$  に依らず求まる。

**2.5 圧力中心  $C_p$  の位置決め**

2.2節(4)式で求めた  $F_\xi, F_\eta$  と、2.4節(7),(9)式で計算した  $M_\xi, M_\eta$  を用いて、静水圧による圧力中心  $C_p$  の位置を決定することを考える。

前節で求めたo点に関する反時計回りのモーメント  $M_\xi, M_\eta$  は、大串(28)が用いた水理学の手法に基づけば、 $C_p(\xi_p, \eta_p)$  に働く合力  $|F_\xi|, F_\eta$  によって、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= |F_\xi| \cdot \eta_p \\ M_\eta &= F_\eta \cdot \xi_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

のように計算できるから、o点から圧力中心  $C_p$  までのξ, η方向の距離  $\xi_p, \eta_p$  は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \xi_p &= \frac{M_\eta}{F_\eta} \\ &= \frac{P_{Lower}^{(\gamma)} \cdot \varepsilon^{(\gamma)}}{P_{Lower}^{(\gamma)}} = \varepsilon^{(\gamma)} = \frac{b^2}{3f} \tan\theta \dots(11) \end{aligned}$$

$$\eta_P = \frac{M_\xi}{|F_\xi|} = \frac{\gamma b \sin \theta (f^2 + \frac{b^2}{3} \tan^2 \theta)}{2 \gamma f b \sin \theta} = \frac{f}{2} + \frac{b^2}{6f} \tan^2 \theta \dots\dots\dots(12)$$

のように、決定できる。ここに、横傾斜角  $\theta \rightarrow 0$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= \frac{b^2}{3f} \theta + \dots \\ \eta_P &= \frac{f}{2} + \frac{b^2}{6f} \theta^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

となるから、直立状態での圧力中心は、 $\theta = 0$  とすればよく、

$$\left. \begin{aligned} (\xi_P, \eta_P) &= \left( 0, \frac{f}{2} \right) \\ C_P &= B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

のように、大気圧  $p_0$  に依存することなく、矩形の図心として求まる。これによって、静水圧による圧力中心  $C_P$  が、周知の浮心位置  $B$  と一致することを証明できた。

### 2.6 横傾斜時の浮心移動距離による検算

図1に示す静水面上の浮体中央  $o'$  を頂点とする、左舷の三角形(露出部)から右舷の三角形(没入部)への一部面積  $\left( \frac{1}{2} b^2 \tan \theta \right)$  の移動による、水面下の全面積  $(2fb)$  の、 $\xi$  方向への浮心移動<sup>(29)</sup>の距離  $\delta l_\xi$  は、

$$\delta l_\xi = \frac{\left( \frac{1}{2} b^2 \tan \theta \right) \cdot \frac{4b}{3}}{2fb} = \frac{b^2}{3f} \tan \theta \dots\dots(15)$$

となる。(11)式で求めた圧力中心の  $\xi_P$  は、この  $\delta l_\xi$  と一致するから、本論の計算が正しいことを確認できた。

### 3 任意の横断面形状の圧力中心 $C_P$ の位置決め<sup>(27)</sup>

図2は、幅  $2b$ 、深さ  $f+h$  (吃水  $f$ 、乾舷  $h$ ) の任意形状の2次元横断面が、右舷側に  $\theta$  だけ横傾斜した場合を示す。断面形状として、水線付近では垂直舷側を仮定する。

静水面中央に原点  $o$  を置き、浮体に固定した座標系を  $o-yz$ 、空間に固定した座標系を  $o-\eta\zeta$  とする。また、浮体表面に立てた、外向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{n} = n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$  とし、 $n_y, n_z$  は、それぞれ、浮体固定の  $y, z$  方向に対する方向余弦である。説明の都合上、2章の図1と座標系が異なっているが、ご容赦戴きたい。

図1と同様に、大気圧を  $p_0$ 、水の比重量を  $\gamma$  とし、大気圧を破線、静水圧を実線、それぞれの圧力を細線、力を太線のベクトルで示していて、全て、浮体表面に対して垂直な  $-\mathbf{n}$  方向に作用する。

#### 3.1 浮体表面に働く $y$ 方向の圧力による力とモーメント

左舷側 ( $Left: y = -|y_L| < 0, n_y < 0$ ) に働く、圧力による  $y$  方向の力  $P_y^{(L)}$  は、乾舷  $C_L^{(0)}$  と没水部  $C_L^{(r)}$  に互り一様に働く大気圧による力と、没水部  $C_L^{(r)}$  ( $b \tan \theta \leq z \leq f$ ) に働く静水圧による力の和で求まる。 $y = y_L$  での浮体表面での水深  $\zeta_L$  は、

$$\zeta_L = (z - |y_L| \tan \theta) \cos \theta = z \cos \theta - |y_L| \sin \theta \dots\dots\dots(16)$$

だから、 $n_y dl = -dz$  であることを用いて、変数を周長  $l$  から  $z$  に置換して積分することにより、 $P_y^{(L)}$  は、

$$\begin{aligned} P_y^{(L)} &= -\int_{C_L^{(0)} + C_L^{(r)}} p_0 n_y dl - \gamma \int_{C_L^{(r)}} \zeta_L n_y dl \\ &= p_0 \int_{-h}^f dz + \gamma \int_{b \tan \theta}^f (z \cos \theta - |y_L| \sin \theta) dz \\ &= p_0 \int_{-h}^f dz + \gamma \cos \theta \int_{b \tan \theta}^f z dz \\ &\quad - \gamma \sin \theta \left( \int_0^f |y_L| dz - b \int_0^{b \tan \theta} dz \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(17)$$

のように計算でき、積分を進めると、

$$\begin{aligned}
 P_y^{(L)} &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma \cos \theta (f^2 - b^2 \tan^2 \theta) \\
 &\quad - \gamma \sin \theta \left( \int_0^f |y_L| dz - b^2 \tan \theta \right) \\
 &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma f^2 \cos \theta \\
 &\quad - \gamma \sin \theta \int_0^f |y_L| dz + \frac{1}{2} \gamma b^2 \sin \theta \tan \theta \\
 &\quad \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

を得る。式中、水線付近 ( $0 \leq z \leq b \tan \theta$ ) では、垂直舷側の仮定により、 $|y_L| = b$  として計算しものである。

右舷側 (Right:  $y = y_R > 0, n_y > 0$ ) に働く、圧力による  $-y$  方向の力  $P_y^{(R)}$  も、同様に、乾舷  $C_R^{(0)}$  と没水部  $C_R^{(y)}$  ( $-b \tan \theta \leq z \leq f$ ) に働く力の和で求まる。 $y = y_R$  での水深  $\zeta_R$  は、

$$\begin{aligned}
 \zeta_R &= (z + y_R \tan \theta) \cos \theta \\
 &= z \cos \theta + y_R \sin \theta \quad \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

だから、 $P_y^{(R)}$  は、 $n_y dl = dz$  を用いて、 $z$  に関する積分に置換して計算すれば、

$$\begin{aligned}
 P_y^{(R)} &= \int_{C_R^{(0)} + C_R^{(y)}} p_0 n_y dl + \gamma \int_{C_R^{(y)}} \zeta_R n_y dl \\
 &= p_0 \int_{-h}^f dz + \gamma \int_{-b \tan \theta}^f (z \cos \theta + y_R \sin \theta) dz \\
 &= p_0 \int_{-h}^f dz + \gamma \cos \theta \int_{-b \tan \theta}^f z dz \\
 &\quad + \gamma \sin \theta \left( \int_0^f y_R dz + b \int_{-b \tan \theta}^0 dz \right) \\
 &= p_0(f+h) + \frac{1}{2} \gamma \cos \theta (f^2 - b^2 \tan^2 \theta) \\
 &\quad + \gamma \sin \theta \left( \int_0^f y_R dz + b^2 \tan \theta \right) \\
 &\quad \dots\dots\dots(20)
 \end{aligned}$$

となり、整理すれば、

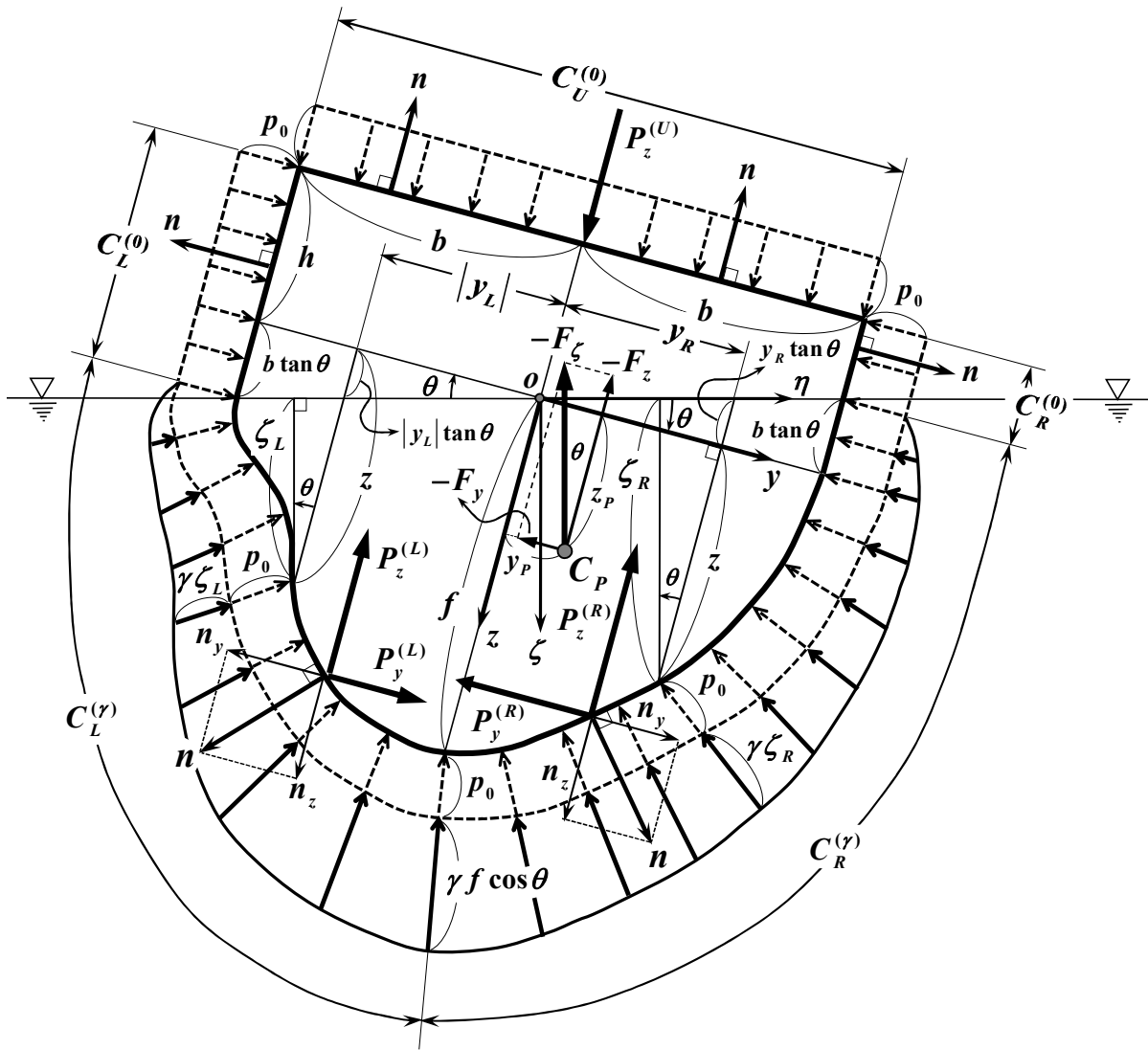


図2 横傾斜した任意形状の横断面に作用する静水圧の分布と圧力中心<sup>(27)</sup>

$$\begin{aligned}
 P_y^{(R)} &= p_0(f+h) + \frac{1}{2}\gamma f^2 \cos\theta \\
 &+ \gamma \sin\theta \int_0^f y_R dz + \frac{1}{2}\gamma b^2 \sin\theta \tan\theta \\
 &\dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

のように求まる。ここでも、(2)式と同様、水線付近 ( $-b \tan\theta \leq z \leq 0$ ) では、 $y_R = b$  としている。

甲板 (Upper:  $n_y = 0$ ) に働く、大気圧による  $y$  方向の力  $P_y^{(U)}$  は、甲板部  $C_U^{(0)}$  に亙る積分で、

$$\begin{aligned}
 P_y^{(U)} &= -\int_{C_U^{(0)}} p_0 n_y d\ell \\
 &= 0 \dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

のように、ゼロである。

次に、左舷 ( $y = -|y_L|$ ) に働く、 $y$  方向の圧力による、原点  $o$  に関する反時計回りのモーメント  $M_y^{(L)}$  は、(2)式の  $P_y^{(L)}$  と同様に計算すれば、

$$\begin{aligned}
 M_y^{(L)} &= -\int_{C_L^{(0)}+C_L^{(\gamma)}} p_0 n_y \cdot z d\ell - \gamma \int_{C_L^{(\gamma)}} \zeta_L n_y \cdot z d\ell \\
 &= p_0 \int_{-h}^f z dz + \gamma \int_{b \tan\theta}^f (z \cos\theta - |y_L| \sin\theta) z dz \\
 &= p_0 \int_{-h}^f z dz + \gamma \cos\theta \int_{b \tan\theta}^f z^2 dz \\
 &\quad - \gamma \sin\theta \left( \int_0^f |y_L| z dz - b \int_0^{b \tan\theta} z dz \right) \\
 &= \frac{1}{2} p_0 (f^2 - h^2) + \frac{1}{3} \gamma \cos\theta (f^3 - b^3 \tan^3 \theta) \\
 &\quad - \gamma \sin\theta \left( \int_0^f |y_L| z dz - \frac{1}{2} b^3 \tan^2 \theta \right) \\
 &= p_0 (f+h) \cdot \frac{f-h}{2} + \frac{1}{2} \gamma f^2 \cos\theta \cdot \frac{2f}{3} \\
 &\quad - \gamma \sin\theta \int_0^f |y_L| z dz + \frac{1}{6} \gamma b^3 \sin\theta \tan^2 \theta \\
 &\dots\dots\dots(23)
 \end{aligned}$$

のように求まる。第1項は、左舷全体を投影した  $z$  軸 ( $-h \leq z \leq f$ ) に働く大気圧  $p_0$  によるモーメントを、第2項は、没水部を投影した  $z$  軸 ( $0 \leq z \leq f$ ) に働く三角分布の静水圧  $\gamma \zeta_L$  によるモーメントを表している。

右舷 ( $y = y_R$ ) に働く、 $-y$  方向の圧力による、原点  $o$  に関する時計回りのモーメント  $M_y^{(R)}$  は、(4)式の  $P_y^{(R)}$  と同様に、

$$\begin{aligned}
 M_y^{(R)} &= \int_{C_R^{(0)}+C_R^{(\gamma)}} p_0 n_y \cdot z d\ell + \gamma \int_{C_R^{(\gamma)}} \zeta_R n_y \cdot z d\ell \\
 &= p_0 \int_{-h}^f z dz + \gamma \int_{-b \tan\theta}^f (z \cos\theta + y_R z \sin\theta) z dz \\
 &= p_0 \int_{-h}^f z dz + \gamma \cos\theta \int_{-b \tan\theta}^f z^2 dz \\
 &\quad + \gamma \sin\theta \left( \int_0^f y_R z dz + b \int_{-b \tan\theta}^0 z dz \right) \\
 &= \frac{1}{2} p_0 (f^2 - h^2) + \frac{1}{3} \gamma \cos\theta (f^3 + b^3 \tan^3 \theta) \\
 &\quad + \gamma \sin\theta \left( \int_0^f y_R z dz - \frac{1}{2} b^3 \tan^2 \theta \right) \\
 &= p_0 (f+h) \cdot \frac{f-h}{2} + \frac{1}{2} \gamma f^2 \cos\theta \cdot \frac{2f}{3} \\
 &\quad + \gamma \sin\theta \int_0^f y_R z dz - \frac{1}{6} \gamma b^3 \sin\theta \tan^2 \theta \\
 &\dots\dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

となる。左舷の(23)式と同様、第1項は、大気圧  $p_0$  によるモーメントを、第2項は、三角分布の静水圧  $\gamma \zeta_R$  によるモーメントを表している。

甲板 ( $n_y = 0$ ) に働く、大気圧による  $y$  方向の力による時計回りモーメント  $M_y^{(U)}$  は、 $C_U^{(0)}$  に亙る積分で、

$$\begin{aligned}
 M_y^{(U)} &= \int_{C_U^{(0)}} p_0 n_y \cdot z d\ell \\
 &= 0 \dots\dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

となり、ゼロである。

### 3.2 浮体表面に働く

#### $z$ 方向の圧力による力とモーメント

左右両舷側 ( $-b < y < b, n_z > 0$ ) に働く、圧力による  $-z$  方向の力  $P_z^{(L+R)}$  は、乾舷  $C_L^{(0)} + C_R^{(0)}$  と没水部  $C_L^{(\gamma)} + C_R^{(\gamma)}$  に亙り一様に働く大気圧による力と、没水部  $C_L^{(\gamma)} + C_R^{(\gamma)}$  に働く静水圧による力の和で求まる。水深  $\zeta$  は、(16)式の  $\zeta_L$  と(19)式の  $\zeta_R$  を纏めて、両舷に亙って、

$$\begin{aligned}
 \zeta &= (z + y \tan\theta) \cos\theta \\
 &= z \cos\theta + y \sin\theta \dots\dots\dots(26)
 \end{aligned}$$

のように書けるから、 $P_z^{(L+R)}$  は、 $n_z d\ell = dy$  を用いて、 $y$  に関する積分で計算できて、

$$\begin{aligned}
 P_z^{(L+R)} &= P_z^{(L)} + P_z^{(R)} \\
 &= \int_{C_L^{(0)}+C_L^{(\gamma)}+C_R^{(\gamma)}+C_R^{(0)}} p_0 n_z d\ell + \gamma \int_{C_L^{(\gamma)}+C_R^{(\gamma)}} \zeta n_z d\ell \\
 &= p_0 \int_{-b}^b dy + \gamma \int_{-b}^b (z \cos \theta + y \sin \theta) dy \\
 &= 2p_0 b + \gamma \cos \theta \int_{-b}^b z(y) dy \quad \dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

となる。y の積分区間は、水線付近で垂直舷側を仮定していることから、3.1 節の z の積分区間と異なり、傾斜角  $\theta$  に依存せず  $-b \leq y \leq b$  である。

甲板 (Upper:  $n_z = -1$ ) に働く、大気圧による z 方向の力  $P_z^{(U)}$  は、甲板部  $C_U^{(0)}$  に互る積分で、

$$\begin{aligned}
 P_z^{(U)} &= -\int_{C_U^{(0)}} p_0 n_z d\ell \\
 &= p_0 \int_{-b}^b dy \\
 &= 2p_0 b \quad \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

となる。

次に、左右両舷側 ( $n_z > 0$ ) に働く、-z 方向の圧力による、原点 o 回りの反時計回りのモーメント  $M_z^{(L+R)}$  は、(27)式の  $P_z^{(L+R)}$  と同様に計算すれば、

$$\begin{aligned}
 M_z^{(L+R)} &= \int_{C_L^{(0)}+C_L^{(\gamma)}+C_R^{(\gamma)}+C_R^{(0)}} p_0 n_z \cdot y d\ell \\
 &\quad + \gamma \int_{C_L^{(\gamma)}+C_R^{(\gamma)}} \zeta n_z \cdot y d\ell \\
 &= p_0 \int_{-b}^b y dy + \gamma \int_{-b}^b (z \cos \theta + y \sin \theta) y dy \\
 &= \gamma \cos \theta \int_{-b}^b y z(y) dy + \frac{2}{3} \gamma b^3 \sin \theta \\
 &\quad \dots\dots\dots(29)
 \end{aligned}$$

となる。

甲板 ( $n_z = -1$ ) に働く、大気圧による z 方向の力による時計回りモーメント  $M_z^{(U)}$  は、 $C_U^{(0)}$  に互る積分で、

$$\begin{aligned}
 M_z^{(U)} &= -\int_{C_U^{(0)}} p_0 n_z \cdot y d\ell \\
 &= p_0 \int_{-b}^b y dy \\
 &= 0 \quad \dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

となり、左右平衡してゼロである。

### 3.3 y, z 方向に働く合力 $F_y, F_z$ と、それによるモーメント $M_y, M_z$

y 方向に働く合力  $F_y$  は、(22)式により甲板からの力  $P_y^{(U)}$  はゼロだから、両舷(18), (21)式の差から、大気圧  $p_0$  に関する項は相殺して、

$$\left. \begin{aligned}
 F_y &= P_y^{(L)} - P_y^{(R)} \\
 &= -\gamma \sin \theta \int_0^f (|y_L| + y_R) dz \\
 &= -\gamma \sin \theta \int_0^f Y(z) dz \\
 &= -\gamma A_w \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

但し、 $Y(z) \equiv |y_L| + y_R$

のように、左向き of 力として求まる。式中で定義した  $Y(z)$  は、水面下 z の位置での浮体の断面幅を表わし、 $A_w$  は、その積分値として得られる水線以下の横断面積である。

z 方向に働く合力  $F_z$  は、両舷(27)式と甲板(28)式の差から、 $F_y$  と同様、 $p_0$  に関する項は相殺して、

$$\begin{aligned}
 F_z &= P_z^{(U)} - P_z^{(L+R)} \\
 &= -\gamma \cos \theta \int_{-b}^b z(y) dy \\
 &= -\gamma A_w \cos \theta \quad \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

のように、上向き of 力として求まり、 $A_w$  は、各 y 座標での深さ  $z(y)$  の積分値として得られる、水線以下の横断面積である。

-y 方向の圧力による、時計回りのモーメント  $M_y$  は、(25)式により甲板からはモーメント  $M_y^{(U)}$  を生じないので、左右両舷(23),(24)式の差から、

$$\begin{aligned}
 M_y &= M_y^{(R)} - M_y^{(L)} \\
 &= \gamma \sin \theta \int_0^f (|y_L| + y_R) z dz - \frac{1}{3} \gamma b^3 \sin \theta \tan^2 \theta \\
 &= \gamma \sin \theta \int_0^f z Y(z) dz - \frac{1}{3} \gamma b^3 \sin \theta \tan^2 \theta \\
 &\quad \dots\dots\dots(33)
 \end{aligned}$$

となる。

-z 方向の圧力による、反時計回りのモーメント  $M_z$  は、(30)式より甲板からはモーメント  $M_z^{(U)}$  を生じないので、(29)式の左右両舷のモーメントに等しく、



$$M_z = M_z^{(L+R)} = \gamma \cos \theta \int_{-b}^b y z(y) dy + \frac{2}{3} \gamma b^3 \sin \theta \quad \dots(34)$$

となる。

### 3.4 η方向とζ方向の合力 $F_\eta, F_\zeta$

前節(31),(32)式で求めた  $F_y, F_z$  を用いて、水平成分の  $F_\eta$  と、鉛直成分の  $F_\zeta$  を求めると、

$$\left. \begin{aligned} F_\eta &= F_y \cos \theta - F_z \sin \theta \\ &= \gamma A_w (-\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) = 0 \\ F_\zeta &= F_z \cos \theta + F_y \sin \theta \\ &= \gamma A_w (-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -\gamma A_w \end{aligned} \right\} (35)$$

のように、左右非対称な断面が横傾斜した場合でも、圧力積分による合力として、水平成分  $F_\eta$  は生じないことが分かる。

鉛直成分  $F_\zeta$  は、Archimedes の原理<sup>(1)</sup>が教える通りの、鉛直上向きに生じる浮力そのものである。

### 3.5 傾斜状態での圧力中心 $C_p$ の位置決め

圧力中心  $C_p$  の位置決め ( $y_p, z_p$ ) は、2.5 節と同様、水理学の手法<sup>(26)</sup>に基づいて、 $y$  座標  $y_p$  は、 $z$  方向の圧力による合力  $F_z$  とモーメント  $M_z$  により、(32),(34)式を用いて、

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{M_z}{F_z} = \frac{\int_{-b}^b y z(y) dy}{\int_{-b}^b z(y) dy} + \frac{2b^3}{3 \int_{-b}^b z(y) dy} \tan \theta \\ &= \frac{\int_{-b}^b y z(y) dy}{A_w} + \frac{2b^3}{3A_w} \tan \theta \quad \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

によって、 $z$  座標  $z_p$  は、 $y$  方向の圧力による  $F_y$  と  $M_y$  により、(31),(33)式を用いて、

$$\begin{aligned} z_p &= -\frac{M_y}{F_y} = \frac{\int_0^f z Y(z) dz}{\int_0^f Y(z) dz} - \frac{b^3}{3 \int_0^f Y(z) dz} \tan^2 \theta \\ &= \frac{\int_0^f z Y(z) dz}{A_w} - \frac{b^3}{3A_w} \tan^2 \theta \quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

のように決定することができる。

ここに、横傾斜角が小さいとして、 $\theta \rightarrow 0$  とすれば、(36),(37)両式の  $y_p, z_p$  は、

$$\left. \begin{aligned} y_p &= \frac{\int_{-b}^b y z(y) dy}{A_w} + \frac{2b^3}{3A_w} \theta + \dots \\ z_p &= \frac{\int_0^f z Y(z) dz}{A_w} - \frac{b^3}{3A_w} \theta^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

但し、 $A_w = \int_{-b}^b z(y) dy = \int_0^f Y(z) dz$

となり、この結果は、水線付近で垂直舷側でない形状の浮体に対しても、成立する。

### 3.6 矩形断面での検算

水面下の断面形状が、矩形(幅  $2b$ 、吃水  $f$ )の場合、 $A_w = 2bf$  であるから、傾斜時の  $C_p(y_p, z_p)$  は、(36),(37)式より、 $y_p$  の第1項は左右対称性よりゼロに、 $z_p$  の第1項は矩形の図心位置より吃水  $f$  の半分になって、

$$\left. \begin{aligned} y_p &= \frac{b^2}{3f} \tan \theta \\ z_p &= \frac{f}{2} - \frac{b^2}{6f} \tan^2 \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

のように定まり、第2章の  $C_p(\xi_p, \eta_p)$  の結果(11),(12)式を使って書けば、

$$\left. \begin{aligned} y_p &= \xi_p \\ z_p &= f - \eta_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

となる。これは、図2の  $z$  軸と、図1の  $\eta$  軸が  $z = f - \eta$  の関係にあることから、第2章の矩形断面の結果と一致するものである。このことから、この第3章で展開した、任意の断面形状に対する圧力中心の位置決め計算が、正しいことを確認できた。

### 3.7 直立状態での圧力中心 $C_p$ の位置決め

直立状態での圧力中心  $C_p$  は、前節(39)式において、 $\theta = 0$  とすればよく、

$$(y_p, z_p) = \left( \frac{\int_{-b}^b y z(y) dy}{A_w}, \frac{\int_0^f z Y(z) dz}{A_w} \right) \quad (41)$$

となり、 $y_p, z_p$  とともに、それぞれ  $y, z$  方向の面積モーメントを水面下の断面積  $A_w$  で除した形であるから、水面下形状の図心位置に相当する

ことが分かる。よって、圧力中心  $C_p$  が、

$$C_p = B \dots\dots\dots(42)$$

のように、周知の浮心位置  $B$  と一致することを証明できた。

直立状態の断面形状が左右対称な場合には、(41)式より  $y_p = 0$  となつて、 $C_p$  の位置は、

$$(y_p, z_p) = \left( 0, \frac{1}{A_w} \int_0^f zY(z) dz \right) \dots\dots(43)$$

によって計算できる。

#### 4 結 論

浮体を横傾斜させた状態で、静水圧の圧力積分によって、圧力中心の位置決めを行なった後、その傾斜角をゼロにすることで「浮心=圧力中心」であることを、第2章では矩形断面について、第3章では、それを任意の断面形状に拡張して、証明することができた。

#### 5 あとがき

序論に書いた「浮心≠圧力中心？」の疑問は、著者が、長崎総合科学大学 船舶工学科（現在は、工学科 船舶工学コース）の必修科目として、十年以上前に「浮体静力学」を担当することになり、Archimedes の原理による浮力を、静水圧の圧力積分によって教えた後、翌週の講義準備をしているとき、浮心位置もその延長で、静水圧の圧力中心として簡単に説明が付くと思つて計算してみると、位置決めをすることができず、おやっ？と思つたときに始まります。

その後、この疑問については、毎年、気になり乍らも、解決が付かないまま、浮心位置については、通常の教科書に倣って、水面下の幾何学的形状の体積中心であると、表題の圧力中心のことに触れることなく、その点を学生から質問されないように、その回だけは、淡々と講義してきました。

今回、その疑問を解決できたので、来年度からは、浮力に続いて浮心位置についても、静水圧の圧力積分によって整合性ある説明を、大学教員として自信を持って講義できる思いです。

#### 謝 辞

著者が示した矩形断面に対する証明<sup>(24)</sup>を、任意形状の断面に拡張することをお勧め下さると共に、仮想的に微弱な水平方向の重力加速度を作用させることにより、ガウスの積分定理を用いて、圧力中心を導くメモ<sup>(25)</sup>をお示し下さつた、(有)数理解析研究所の一色 浩 博士に、心からの御礼と深甚なる感謝の意を表します。

一色 博士によれば、この問題にガウスの定理を先駆的に適用されたのは、防衛大学の故別所 正利 名誉教授とのこと。その慧眼に、改めて敬意を表する次第です。

本稿のテーマに関して、幾多の有益なご助言やご討論を戴いた、防衛大学の鈴木 勝雄 名誉教授<sup>(30)</sup>、藪下 和樹 准教授<sup>(31)</sup>、長崎総合科学大学 澁佐 雄一郎 教授、ならびに、(有)実用技術研究所の慎 燦益 所長<sup>(14)</sup>に、篤く御礼申し上げます。

本研究を進めるに当たり、終始温かいご激励を戴いた、舟艇協会の理事でもある、長崎総合科学大学 木下 健 学長に、心より御礼を申し上げます、本稿を閉じます。

#### 参 考 文 献

- (1) ARCHIMEDES : The Works of Archimedes, On Floating Bodies, Book I & Book II, Edited and Translated by T. L. HEATH, Cambridge University Press, pp.253~300, 1897.
- (2) 友近 晋 : 流体力学, 第2章 流体静力学, 現代工学社, pp.6~35, 1972年6月(復刻発行).
- (3) 小谷 正雄 : 物理学概説 上巻(改訂版), 第二篇連続体の力学, §9 アルキメデスの原理, 裳華房, pp.96~97, 1950年10月(第1版).
- (4) 金原 寿郎 : 基礎物理学 上巻, 第7章 流体, §7.3 浮力, 裳華房, pp.144~145, 1963年3月(第1版).
- (5) 石原 藤次郎, 本間 仁 : 応用水理学(上) 一般水理学, 1-1 静水力学, 丸善, pp.3~6, 1957年4月(第1版).
- (6) 吉川 秀夫 : 水理学 — 講義と演習 —, 第4章 静止流体の力学, 技報堂, pp.67~74, 1976年4月(1版1刷).

- (7) Pierre BOUGUER : *Traité du Navire, de sa Construction, et de ses Mouvements*, (Treatise of the Ship, its Construction and its Movements), Seconde Section, Edited by Chez JOMBERT, Paris, pp.249~324, 1746.
- (8) 西川 広 : 初等 船舶算法, 第 4 章 浮体の理論, 4-2 浮力, 海文堂, pp.83~85, 1964 年 7 月 (初版).
- (9) 元良 誠三(監修), 小山 健夫, 藤野 正隆, 前田 久明(共著): 船体と海洋構造物の運動学, 第 I 章 浮体の静力学, 成山堂, pp.1~10, 1982 年 11 月 (初版).
- (10) Norman A. HAMLIN, Lawrence L. GOLDBERG : *Principles of Naval Architecture* (2<sup>nd</sup>. Revision), Volume I - Stability and Strength, Chapter 1 - Ship Geometry, Chapter 2 - Intact Stability, Edited by Edward V. LEWIS, Society of Naval Architects and Marine Engineers, p.16~17, p.64, Jersey City, NJ, April 1988 (1<sup>st</sup>. Printing).
- (11) Horst NOWACKI, Larrie D. FERREIRO : *Historical Roots of the Theory of Hydrostatic Stability of Ships*, 8<sup>th</sup>. International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, pp.1~30, 2003.
- (12) Larrie D. FERREIRO : *Ships and Science, The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800*, Chapter 4-Inventing the Metacenter, The MIT Press, pp.207~212, January 2010.
- (13) 池田 良穂, 古川 芳孝, 片山 徹, 藤井 辰博, 村井 基彦, 山口 悟 : 船舶海洋工学シリーズ① 船舶算法と復原性, 第 3 章 排水量等計算と曲線図, 3.5 浮力と浮心, 日本船舶海洋工学会 能力開発センター 教科書編纂委員会 監修, 成山堂, pp.43~46, 2012 年 4 月 (初版).
- (14) 慎 燦益 : 造船幾何学 — 造船設計の基礎知識 —, 第 4 章 排水量等計算と曲線図, 4.2 アルキメデスの原理, 海文堂, pp.125~133, 2013 年 2 月 (初版).
- (15) 杉原 喜義 : 理論運用学 (船舶力学編), 第 2 章 浮力および排水量, 2.1 浮力, 海文堂, pp.13~14, 1964 年 7 月 (初版).
- (16) 明渡 範次 : 基本 航海力学, 第 2 章 剛体の力学, 2.3.7 浮心, 海文堂, pp.110~111, 1983 年 6 月 (初版).
- (17) 野原 威男(原著), 庄司 邦昭(著) : 航海造船学 【二訂版】, 第 2 編 船体の安定と動揺, 第 8 章 排水量, 8-1 浮力, 海文堂, pp.139~140, 2005 年 4 月 (二訂初版).
- (18) 小松 正彦 : 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察, 舟艇技報, No.93, pp.21~25, 2007 年 12 月.
- (19) 瀬戸 秀幸 : 「浮心」考 — 小松: 浮体に働く浮力の作用中心に関する考察 の再検討 —, 第 14 回推進性能・運動性能合同研究会, 2010 年.
- (20) 瀬戸 秀幸 : 浮力の作用中心に関する一考察, 日本船舶海洋工学会 講演会論文集, 第 12 号, pp.529~532, 2011 年 5 月.
- (21) 鈴木 勝雄 : 神説「浮心の法則」, 2011 年 1 月.
- (22) 小松 正彦 : 座標変換による浮力の作用中心に関する考察, 第 19 回推進性能・運動性能合同研究会, 2012 年.
- (23) 渡辺 倫堂 : 船体周りの圧力分布と浮心の関係に関する研究, 防衛大学校 機械システム工学科 船舶工学講座 卒業論文, (指導) 藪下和樹, 岡畑 豪, pp.1~25, 2013 年 3 月.
- (24) 堀 勉 : 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — 浮心 = 圧力中心の証明 —, 日本航海学会誌, 第 203 号, pp.90~94, 2018 年 1 月.
- (25) 一色 浩 : Pressure Center, 2018 年 3 月.
- (26) 藪下 和樹 : 船舶の復原及び推進性能 (2018 年度版), 第 4 章 浮力と圧力分布の関係, 防衛大学校 機械システム工学科 テキスト, pp.81~93, 2018 年 5 月.
- (27) 堀 勉 : 静水圧の圧力積分による船の浮心位置の決定 — その 2 : 任意の断面形状の場合 —, 日本航海学会誌, 第 205 号, pp.28~34, 2018 年 7 月.
- (28) 大串 雅信 : 理論船舶工学 (上巻) 新訂版, 1.3 浮力の例題, 海文堂, pp.4~5, 1971 年 6 月 (初版).
- (29) 堀 勉 : 船のメタセンター半径  $\overline{BM}$  の導出に関する一考察, 日本航海学会誌, 創刊第 200 号 記念号, pp.75~79, 2017 年 4 月.
- (30) 鈴木 勝雄 : 見かけの浮心について — 堀論文<sup>(24)</sup>に関連して —, 2018 年 4 月.
- (31) 藪下 和樹 : 物体周りの圧力分布による浮心位置の同定, 第 10 回推進・運動性能研究会, 2018 年 6 月.

## 目 次

舟艇技報 (Boat Engineering) No. 135 September 2018

---

### [技術資料]

「浮力静力学」の基礎理論に関する新展開

その1:「浮心=圧力中心」の証明・・・長崎総合科学大学教授 堀 勉…………… 1

「旧海軍魚雷艇技術概史」(2)・・・舟艇協会 廣郡 洋祐 …………… 11

クルーザー読本「クルーザーに乗りたいた方のために」

その4・クルーザー航海術 (Navigation) - 3・・・HURUTAKA 福永 昭……………18

「18m 木造艇」建造記録(4) ……葉山ヨット工房 主人 馬渡 健治…………… 33

知っておきたい「舟艇・船舶」の基礎知識

海事関連法規及び施策・(4) ……舟艇協会編集委員 横山 勲…………… 51

### [マリタイム・レポート]

世界における中小型船用主機関の動向(3) ……舟艇協会編集委員 横山 勲……………43

### [コラム]

Click in the “船外機情報村” - その2 ……船外機情報村入口主宰 吉谷 瑞男…………… 38

### [ドキュメンタリー]

アマチュアによる設計・自作の記録

「3.3m ディンギー建造記」- 2 ……四橋 渉……………25

[舟艇協会の活動] ……………58

お断り:

ご好評をいただいております「プロペラのキャビテーション」は、筆者の都合によりしばらく休載いたします。ご了承ください。